**41**

連立漸化式の解法

はじめに

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$ の形にする。

方法 **1**：連立漸化式をいじり，等比数列の形にする

手順 **1**

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$ ・・・①

$b_{n+1} = ra_n + sb_n$ ・・・②

①－$k \times$②より，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)a_n + (q - ks)b_n$

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)\left(a_n + \dfrac{q - ks}{p - kr}b_n\right)$ ・・・③

と変形する。

手順 **2**

③の右辺の $\dfrac{q - ks}{p - kr}$ が $\dfrac{q - ks}{p - kr} = -k$ となれば，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)(a_n - kb_n)$ より，

$a_n - kb_n$ は，公比 $p - kr$，初項 $a_1 - kb_1$ の等比数列だから，

$a_n - kb_n = (p - kr)^{n-1}(a_1 - kb_1)$ ・・・④

となる。

したがって，$\dfrac{q - ks}{p - kr} = -k$，

すなわち $k$ についての 2 次方程式

$rk^2 - (p - s)k - q = 0$ ・・・⑤

を解き，

$k$ が異なる 2 実数解をもつならば，

④の式が 2 つできるので，その連立方程式を解けばよい。

$k$ が重解をもつならば，

④，①，②から $a_n$ または $b_n$ の漸化式を得，解けばよい。

補足 **1**

$p = s, q = r$ の場合は，⑤より，$k = \pm 1$ だから，これを覚えておいて，

いきなり①＋②と①－②から始めれば手際よく解ける。

**補足 2**

$a_{n+1} = pa_n + qb_n + t$ ・・・①’

$b_{n+1} = ra_n + sb_n + u$ ・・・②’

（$t, u$ は実数）

の場合においても

①’－ $k \times$ ②’より， $a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)\left(a_n + \dfrac{q - ks}{p - qr} b_n\right) + t - ku$ とした後，

$\dfrac{q - ks}{p - kr} = -k$ ，すなわち $k$ についての 2 次方程式 $rk^2 - (p - s)k - q = 0$ を解き，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)(a_n - kb_n) + t - ku$ の形の 2 項間漸化式

（$c_n = a_n - kb_n$ とおけば， $c_{n+1} = (p - kr)c_n + t - ku$ ）にしてから，

その漸化式を解けばよい。

よって，

方法 1 は万能型といえる。

**方法 2：$a_n$ と $b_n$ について，それぞれの 3 項間漸化式をつくってから解く。**

$a_{n+1}=pa_n+qb_n$　・・・①

$b_{n+1}=ra_n+sb_n$　・・・②

$a_n$ についての漸化式

①より，$qb_n=a_{n+1}-pa_n$　$\therefore qb_{n+1}=a_{n+2}-pa_{n+1}$

②× $q$ より，$qb_{n+1}=qra_n+sqb_n$

よって，$a_{n+2}-pa_{n+1}=qra_n+s(a_{n+1}-pa_n)$

$\therefore a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0$　・・・⑥

$b_n$ についての漸化式

②より，$ra_n=b_{n+1}-sb_n$　$\therefore ra_{n+1}=b_{n+2}-sb_{n+1}$

①× $r$ より，$ra_{n+1}=pra_n+qrb_n$

よって，$b_{n+2}-sb_{n+1}=p(b_{n+1}-sb_n)+qrb_n$

$\therefore b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0$　・・・⑦

漸化式⑥，⑦を解くことにより，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求める。

**補足 3**

$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$ より，$\begin{cases}a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0\\ b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0\end{cases}$ は覚えておくとよい。

覚え方

$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$ より，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2-(p+s)A+(ps-qr)E=O$

これより，

$a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0$

$b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0$

**方法 3：行列を利用して解く**

**手順 1**

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$　$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

**手順 2**

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1}$ を求める。

**求め方の 1 例**

わかりやすさの目的で $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2 - (p+s)A + (ps-qr)E = O$

ここで，またわかりやすさの目的で，

$A^2 - (p+s)A + (ps-qr)E = (A-\alpha E)(A-\beta E)$ と表すと，$(A-\alpha E)(A-\beta E) = O$

続いて，

ある行列 $X^{n-1}$ を $(X-\alpha E)(X-\beta E)$ で割った商を $Q(X)$，余りを $mX + nE$ とする。

すると，$X^{n-1} = (X-\alpha E)(X-\beta E)Q(X) + mX + nE$

$X = \alpha E$ のとき

$\alpha^{n-1}E = m\alpha E + nE$　$\therefore m\alpha + n = \alpha^{n-1}$　・・・⑥

$X = \beta E$ のとき

$\beta^{n-1}E = m\beta E + nE$　$\therefore m\beta + n = \beta^{n-1}$　・・・⑦

⑥，⑦より，

$$m = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta},\quad n = -\frac{\alpha\beta\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)}{\alpha - \beta}$$

よって，$X^{n-1} = (X-\alpha E)(X-\beta E)Q(X) + \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}X - \dfrac{\alpha\beta\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)}{\alpha - \beta}E$

これに $X = A$ を代入すると，$(A-\alpha E)(A-\beta E) = O$ より，

$$A^{n-1} = \frac{\alpha^{n\backslash 1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}A - \frac{\alpha\beta\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)}{\alpha - \beta}E$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \left\{\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}A - \frac{\alpha\beta\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)}{\alpha - \beta}E\right\}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

**補足 4**

3 項間漸化式 $a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n$ を行列で解く場合

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 以下同様

参考サイト：数学小ネタ http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukoneta.html

ケイリー・ハミルトンの定理と行列の $n$ 乗

**(1)～(3)**

$a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1}$ ・・・①

$b_n = pb_{n-1} + qa_n$ ・・・②

①を②に代入し，整理すると，

$b_n = pqa_{n-1} + (p + q^2)b_{n-1}$ ・・・③

①，③について，$p + q = 1$ より，

$a_n = pa_{n-1} + (1 - p)b_{n-1}$ ・・・④

$b_n = (p - p^2)a_{n-1} + (p^2 - p + 1)b_{n-1}$ ・・・⑤

方法 **1** で解く

$$\begin{aligned} a_n - kb_n &= \{p - k(p - p^2)\}a_{n-1} + \{1 - p - k(p^2 - p + 1)\}b_{n-1} \\ &= \{p - k(p - p^2)\}\left\{a_{n-1} + \frac{1 - p - k(p^2 - p + 1)}{p - k(p - p^2)}b_{n-1}\right\} \end{aligned}$$

$\dfrac{1 - p - k(p^2 - p + 1)}{p - k(p - p^2)} = -k$ とすると，$(k-1)(pk+1) = 0$ より，$k = 1, -\dfrac{1}{p}$

$k = 1$ のとき

$$a_n - b_n = p^2(a_{n-1} - b_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n - b_n &= (p^2)^n(a_0 - b_0) \\ &= p^{2n}(1 - 2) \\ &= -p^{2n} \end{aligned}$$

$\therefore b_n - a_n = p^{2n}$ ・・・⑥

$k = -\dfrac{1}{p}$ のとき

$$a_n + \frac{1}{p}b_n = a_{n-1} + \frac{1}{p}b_{n-1} = \cdots = a_0 + \frac{1}{p}b_0 = 1 + \frac{2}{p}$$

$\therefore pa_n + b_n = p + 2$ ・・・⑦

⑥と⑦より，

$a_n = \dfrac{2 + p - p^{2n}}{1 + p}$，$b_n = \dfrac{2 + p + p^{2n+1}}{1 + p}$

方法 **2** で解く

$a_n = pa_{n-1} + (1-p)b_{n-1}$　・・・④

$b_n = (p-p^2)a_{n-1} + (p^2-p+1)b_{n-1}$　・・・⑤

より，

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p-p^2 & p^2-p+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$

$a_{n+2} - \{p+(p^2-p+1)\}a_{n+1} + \{p(p^2-p+1)-(1-p)(p-p^2)\}a_n = 0$

$b_{n+2} - \{p+(p^2-p+1)\}b_{n+1} + \{p(p^2-p+1)-(1-p)(p-p^2)\}b_n = 0$

よって，

$a_{n+2} - (p^2+1)a_{n+1} + p^2a_n = 0$

$b_{n+2} - (p^2+1)b_{n+1} + p^2b_n = 0$

$a_{n+2} - (p^2+1)a_{n+1} + p^2a_n = 0$ について

特性方程式 $t^2 - (p^2+1)t + p^2 = 0$ を解くと，$(t-p^2)(t-1) = 0$　$\therefore t = p^2, 1$

$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = p^2(a_{n+1} - a_n)$，$a_{n+2} - p^2a_{n+1} = a_{n+1} - p^2a_n$

$\therefore a_{n+1} - a_n = (p^2)^n(a_1 - a_0)$，$a_{n+1} - p^2a_n = a_1 - p^2a_0$

$a_0 = 1, b_0 = 2$ より，$a_1 = 2-p$

$\therefore a_{n+1} - a_n = p^{2n}(1-p)$，$a_{n+1} - p^2a_n = 2-p-p^2$

$\therefore (p^2-1)a_n = p^{2n}(1-p) + (1-p)(2+p)$

$0<p<1$ より，

$(1+p)a_n = p^{2n} + p + 2$

$\therefore a_n = \dfrac{2+p-p^{2n}}{1+p}$

$b_{n+2} - (p^2+1)b_{n+1} + p^2b_n = 0$ について

同様にして，

$b_{n+1} - b_n = (p^2)^n(b_1 - b_0)$，$b_{n+1} - p^2b_n = b_1 - p^2b_0$，

$a_0 = 1, b_0 = 2$ より，$b_1 = p^2-p+2$

$\therefore b_{n+1} - b_n = p^{2n}(p^2-p)$，$b_{n+1} - p^2b_n = -p^2-p+2$

$\therefore (p^2-1)b_n = p(p-1)p^{2n} + (p-1)(p+2)$

$\therefore b_n = \dfrac{2+p+p^{2n+1}}{1+p}$