

42

分数形の漸化式の一般解の求め方

$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の一般項の求め方（入試問題では、誘導がついているのがふつうである）

方法 1

置き換えにより、分数漸化式の基本形 $b_{n+1} = \frac{Ab_n}{Bb_n + C}$ を得てから解く。

求め方のしくみ

$a_n = b_n + x$ とおいて、 $b_{n+1} = \frac{Ab_n}{Bb_n + C}$ の形になるような x の値を求める。

↓

$$b_{n+1} = \frac{Ab_n}{Bb_n + C} \text{ を解く。}$$

つまり,

$$a_n \xrightarrow{f} a_{n+1} = f(a_n) = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$$

↓ 置き換え

$$b_n + x \xrightarrow{f} b_{n+1} + x = f(b_n + x) = \frac{p(b_n + x) + q}{r(b_n + x) + s}$$

↓ 適当な x の値を求める。

$$b_n \xrightarrow{g} b_{n+1} = g(b_n) = \frac{Ab_n}{Bb_n + C}$$

↓

$$b_{n+1} = \frac{Ab_n}{Bb_n + C} \text{ を解く。}$$

↓

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$$\left(\begin{array}{l} \text{補足} \\ x = \alpha \text{ のとき, } b_{n+1} = \frac{Ab_n}{Bb_n + C} \text{ になるとすると,} \\ b_n = a_n - \alpha \text{ より, } a_{n+1} - \alpha = \frac{A(a_n - \alpha)}{B(a_n - \alpha) + C} \text{ だから,} \\ \text{これから直接数列 } \{a_n\} \text{ の一般項を求めてもよい。} \end{array} \right)$$

手順

$a_n = b_n + x$ とおくと,

$$\begin{aligned} b_{n+1} + x &= \frac{p(b_n + x) + q}{r(b_n + x) + s} \\ &= \frac{pb_n + px + q}{rb_n + rx + s} \\ &= \frac{px + q}{rx + s} + \frac{\frac{ps - qr}{rx + s} b_n}{rb_n + rx + s} \end{aligned}$$

$$\therefore b_{n+1} = \left(\frac{px + q}{rx + s} - x \right) + \frac{\frac{ps - qr}{rx + s} b_n}{rb_n + rx + s}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{補足} \\ \frac{pb_n + px + q}{rb_n + rx + s} = K + \frac{Lb_n}{rb_n + rx + s} \text{ とおくと,} \\ K + \frac{Lb_n}{rb_n + rx + s} = \frac{(rK + L)b_n + K(rx + s)}{rb_n + rx + s} \text{ より, } \begin{cases} rK + L = p \\ K(rx + s) = px + q \end{cases} \\ \therefore K = \frac{px + q}{rx + s}, \quad L = \frac{ps - qr}{rx + s} \end{array} \right)$$

ここで, $\frac{px + q}{rx + s} - x = 0$ の解を α とすると, $b_{n+1} = \frac{\frac{ps - qr}{rx + s} b_n}{rb_n + r\alpha + s}$

すなわち $b_{n+1} = \frac{Ab_n}{Bb_n + C}$ の形にできる。

よって, $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \cdot \frac{1}{b_n}$ から数列 $\{b_n\}$ の一般項が得られ,

さらに, $a_n = b_n + \alpha$ から, 数列 $\{a_n\}$ の一般項が求められる。

重要補足

方程式 $\frac{px + q}{rx + s} - x = 0$ は,

$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の a_{n+1}, a_n を x に置き換えた方程式 $x = \frac{px + q}{rx + s}$ と同じである。

よって,

$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の a_{n+1}, a_n を x に置き換え, その解を求めればよい。

まとめ

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \text{ の特性方程式 } x = \frac{px + q}{rx + s} \text{ を解く。}$$

↓

$$\text{特性方程式の実数解を } \alpha \text{ とすると, } a_n = b_n + \alpha \text{ とおき, } a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \text{ に代入する。}$$

↓

$$\text{漸化式を } b_{n+1} = \frac{Ab_n}{Bb_n + C} \text{ の形に変形する。}$$

以後の処理も含めた分数漸化式の一般解の求め方は、以下の例を参照のこと

例 1：特性方程式の解が重解の場合

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n - 16}{a_n - 3} \quad (n=1, 2, \dots)$$

解

$$x = \frac{5x - 16}{x - 3} \text{ を解くと, } x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \therefore x = 4$$

$$a_n = b_n + 4 \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} + 4 &= \frac{5(b_n + 4) - 16}{(b_n + 4) - 3} \\ &= \frac{5b_n + 4}{b_n + 1} \\ &= \frac{4(b_n + 1) + b_n}{b_n + 1} \\ &= 4 + \frac{b_n}{b_n + 1} \end{aligned}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{b_n}{b_n + 1}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_n} + 1$$

よって、数列 $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$ は、初項 $\frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_1 - 4} = 1$ 、公差 1 の等差数列である。

$$\therefore \frac{1}{b_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{n}$$

$$\therefore a_n = b_n + 4 = \frac{1}{n} + 4$$

例 2：特性方程式の解が異なる 2 実数解の場合

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{-a_n + 8}{-a_n + 5} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

解

$$x = \frac{-x + 8}{-x + 5} \text{ を解くと, } x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \therefore x = 2, 4$$

解法 1

$$a_n = b_n + 2 \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} + 2 &= \frac{-(b_n + 2) + 8}{-(b_n + 2) + 5} \\ &= \frac{-b_n + 6}{-b_n + 3} \\ &= \frac{2(-b_n + 3) + b_n}{-b_n + 3} \\ &= 2 + \frac{b_n}{-b_n + 3} \end{aligned}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{b_n}{-b_n + 3}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}} = -1 + \frac{3}{b_n}$$

$$\therefore \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{2} = 3 \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{b_n} - \frac{1}{2} = 3^{n-1} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{2} \right) = 3^{n-1} \left(\frac{1}{a_1 - 2} - \frac{1}{2} \right) = 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{b_n} = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$$

$$\therefore a_n = b_n + 2 = \frac{2}{3^{n-1} + 1} + 2 = \frac{2 + 2 \cdot 3^{n-1} + 2}{3^{n-1} + 1} = \frac{2(3^{n-1} + 2)}{3^{n-1} + 1}$$

解法 2 (特性方程式の解が重解の場合は無理)

等比数列の形にしてから解く。

$$a_n = b_n + 2 \text{ とおくと, } b_{n+1} = \frac{b_n}{-b_n + 3} \quad \therefore a_{n+1} - 2 = \frac{a_n - 2}{-a_n + 5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_n = c_n + 4 \text{ とおくと, } c_{n+1} = \frac{3c_n}{-c_n + 1} \quad \therefore a_{n+1} - 4 = \frac{3a_n - 12}{-a_n + 5} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} - 4} = \frac{a_n - 2}{3a_n - 12} = \frac{1}{3} \left(\frac{a_n - 2}{a_n - 4} \right)$$

よって, 数列 $\left\{ \frac{a_n - 2}{a_n - 4} \right\}$ は, 初項 $\frac{a_1 - 2}{a_1 - 4} = -1$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。

$$\therefore \frac{a_n - 2}{a_n - 4} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore 3^{n-1} a_n - 2 \cdot 3^{n-1} = -a_n + 4$$

$$\therefore a_n = \frac{2(3^{n-1} + 2)}{3^{n-1} + 1}$$

方法 2

分数漸化式の基本形に変形できる形 $a_{n+1} - \alpha = \frac{A(a_n - \alpha)}{ra_n + s}$ にしてから解く。

手順

$$a_{n+1} - x = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - x$$

↓

$$a_{n+1} - x = \frac{(p - rx)a_n + q - sx}{ra_n + s}$$

↓

$$a_{n+1} - x = \frac{(p - rx) \left(a_n + \frac{q - sx}{p - rx} \right)}{ra_n + s}$$

ここで、左辺 $a_{n+1} - x$ と右辺の $a_n + \frac{q - sx}{p - rx}$ に注目して、 $-x = \frac{q - sx}{p - rx}$ となる x を求める。

$$\left(\begin{array}{l} \text{重要補足} \\ -x = \frac{q - sx}{p - rx} \text{ より, } rx^2 - (p - s)x - q = 0 \\ a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \text{ の } a_{n+1}, a_n \text{ を } x \text{ に置き換えた方程式 } x = \frac{px + q}{rx + s} \text{ より, } rx^2 - (p - s)x - q = 0 \\ \text{よって, } -x = \frac{q - sx}{p - rx} \text{ と } x = \frac{px + q}{rx + s} \text{ は同じ方程式である。} \\ \text{したがって, } a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \text{ の } a_{n+1}, a_n \text{ を } x \text{ に置き換えた方程式 } x = \frac{px + q}{rx + s} \text{ から} \\ \text{解を求めればよい。} \end{array} \right)$$

↓

特性方程式 $x = \frac{px + q}{rx + s}$ (または, $-x = \frac{q - sx}{p - rx}$) の解を α とすると,

$$\frac{q - s\alpha}{p - r\alpha} = -\alpha \text{ より, } a_{n+1} - \alpha = \frac{(p - r\alpha)(a_n - \alpha)}{ra_n + s} \text{ が得られる。}$$

以後の処理も含めた分数漸化式の一般解の求め方は、以下の例を参照のこと

例 1：特性方程式の解が重解の場合

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n - 16}{a_n - 3} \quad (n=1, 2, \dots)$$

解

$$x = \frac{5x - 16}{x - 3} \text{ を解くと, } x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \therefore x = 4$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 4 &= \frac{5a_n - 16}{a_n - 3} - 4 \\ &= \frac{a_n - 4}{a_n - 3} \\ &= \frac{a_n - 4}{(a_n - 4) + 1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1} - 4} = \frac{1}{a_n - 4} + 1$$

よって、数列 $\left\{ \frac{1}{a_n - 4} \right\}$ は、初項 $\frac{1}{a_1 - 4} = 1$ 、公差 1 の等差数列である。

$$\therefore \frac{1}{a_n - 4} = n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n} + 4$$

例 2：特性方程式の解が異なる 2 実数解の場合

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{-a_n + 8}{-a_n + 5} \quad (n=1, 2, \dots)$$

解

$$x = \frac{-x + 8}{-x + 5} \text{ を解くと, } x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \therefore x = 2, 4$$

解法 1 $x = 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= \frac{-a_n + 8}{-a_n + 5} - 2 \\ &= \frac{a_n - 2}{-a_n + 5} \\ &= \frac{a_n - 2}{-(a_n - 2) + 3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1} - 2} = 3 \cdot \frac{1}{a_n - 2} - 1$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-2} - \frac{1}{2} = 3 \left(\frac{1}{a_n-2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{a_n-2} - \frac{1}{2} = 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n - 2 = \frac{2}{3^{n-1} + 1}$$

$$\therefore a_n = \frac{2(3^{n-1} + 2)}{3^{n-1} + 1}$$

解法 2 (特性方程式の解が重解の場合は無理)

$$x=2 \text{ のとき, } a_{n+1} - 2 = \frac{a_n - 2}{-a_n + 5} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$x=4 \text{ のとき, } a_{n+1} - 4 = \frac{3(a_n - 4)}{-a_n + 5} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\frac{\textcircled{3}}{\textcircled{4}} \text{ より, } \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} - 4} = \frac{a_n - 2}{3(a_n - 4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{a_n - 2}{a_n - 4} \right)$$

よって, 数列 $\left\{ \frac{a_n - 2}{a_n - 4} \right\}$ は, 初項 $\frac{a_1 - 2}{a_1 - 4} = -1$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。

$$\therefore \frac{a_n - 2}{a_n - 4} = - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\therefore 3^{n-1} a_n - 2 \cdot 3^{n-1} = -a_n + 4$$

$$\therefore a_n = \frac{2(3^{n-1} + 2)}{3^{n-1} + 1}$$

方法 3 (特性方程式の解が重解の場合は使えない)

等比数列の漸化式： $\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta} = t \cdot \frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ に変形してから解く

求め方のしくみ

$$a_n \xrightarrow{f} a_{n+1} = f(a_n) = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \text{ から,}$$

$$\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \xrightarrow{h} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = h\left(\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}\right) = t \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \text{ となるような } \alpha, \beta \text{ を求める。}$$

↓

$$\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = t \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \text{ から, } \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \frac{a_1 - \alpha}{a_1 - \beta} \cdot t^{n-1} \text{ が得られるので,}$$

これから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

手順

$$b_n = g(a_n) = \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \text{ とおくと, 関数 } f, g, h \text{ の関係は以下のようになる。}$$

$$\begin{array}{ccc} a_n & \xrightarrow{f} & a_{n+1} = f(a_n) = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ b_n = g(a_n) = \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} & \xrightarrow{h} & \begin{cases} b_{n+1} = h(b_n) = h(g(a_n)) \\ b_{n+1} = g(a_{n+1}) = g(f(a_n)) \end{cases} \end{array}$$

したがって,

α と β を求めるには,

合成関数の連立方程式 $\begin{cases} b_{n+1} = h(b_n) = h(g(a_n)) \\ b_{n+1} = g(a_{n+1}) = g(f(a_n)) \end{cases}$ を解けばよい。

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= h(b_n) \\ &= h(g(a_n)) \\ &= t \cdot g(a_n) \\ &= t \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \end{aligned}$$

$$\therefore b_{n+1} = t \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \quad \dots \quad \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= g(a_{n+1}) \\
&= g(f(a_n)) \\
&= \frac{f(a_n) - \alpha}{f(a_n) - \beta} \\
&= \frac{\frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \alpha}{\frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \beta} \\
&= \frac{pa_n + q - \alpha(ra_n + s)}{pa_n + q - \beta(ra_n + s)} \\
&= \frac{(p - r\alpha)a_n + q - s\alpha}{(p - r\beta)a_n + q - s\beta} \\
&= \frac{p - r\alpha}{p - r\beta} \cdot \frac{a_n + \frac{q - s\alpha}{p - r\alpha}}{a_n + \frac{q - s\beta}{p - r\beta}} \\
\therefore b_{n+1} &= \frac{p - r\alpha}{p - r\beta} \cdot \frac{a_n + \frac{q - s\alpha}{p - r\alpha}}{a_n + \frac{q - s\beta}{p - r\beta}} \quad \dots \quad \textcircled{6}
\end{aligned}$$

⑤, ⑥より,

$$t = \frac{p - r\alpha}{p - r\beta}, \quad -\alpha = \frac{q - s\alpha}{p - r\alpha}, \quad -\beta = \frac{q - s\beta}{p - r\beta}$$

よって, α と β は方程式 $x = \frac{sx - q}{rx - p}$ を解くことにより求められ,

これを $t = \frac{p - r\alpha}{p - r\beta}$ に代入することにより, 公比 t が求められる。

重要補足

$$-x = \frac{q - sx}{p - rx} \text{ より, } rx^2 - (p - s)x - q = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \text{ の } a_{n+1}, a_n \text{ を } x \text{ に置き換えた方程式 } x = \frac{px + q}{rx + s} \text{ より, } rx^2 - (p - s)x - q = 0$$

$$\text{よって, } -x = \frac{q - sx}{p - rx} \text{ と } x = \frac{px + q}{rx + s} \text{ は同じ方程式である。}$$

$$\text{したがって, } a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \text{ の } a_{n+1}, a_n \text{ を } x \text{ に置き換えた方程式 } x = \frac{px + q}{rx + s} \text{ から}$$

解を求めればよい。

まとめ

$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}$ の特性方程式 $x = \frac{px + q}{rx + s}$ が異なる 2 実数解 α, β をもつとき,

$$\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = t \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} \quad \left(t = \frac{p - r\alpha}{p - r\beta} \right) \text{ と表せる。}$$

例：特性方程式の解が異なる 2 実数解の場合

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{-a_n + 8}{-a_n + 5} \quad (n=1, 2, \dots)$$

解

$x = \frac{-x+8}{-x+5}$ の解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると, $x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \therefore x = 2, 4$

$$\therefore \alpha = 2, \quad \beta = 4$$

ここで, $\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_{n+1} - \beta} = t \cdot \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ とおくと, $t = \frac{-1 - (-1) \cdot 2}{-1 - (-1) \cdot 4} = \frac{1}{3}$ より, $\frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} - 4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_n - 2}{a_n - 4}$

よって, 数列 $\left\{ \frac{a_n - 2}{a_n - 4} \right\}$ は, 初項 $\frac{a_1 - 2}{a_1 - 4} = -1$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。

$$\therefore \frac{a_n - 2}{a_n - 4} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore 3^{n-1} a_n - 2 \cdot 3^{n-1} = -a_n + 4$$

$$\therefore a_n = \frac{2(3^{n-1} + 2)}{3^{n-1} + 1}$$