

43

方法

漸化式 $a_{n+1} = f(a_n)$ から数列 $\{a_n\}$ の極限 α を推測する。

↓

$$|a_n - \alpha| = |f(a_{n-1}) - \alpha| \leq r \cdot |a_{n-1} - \alpha| = r^{n-1} |a_1 - \alpha| \quad (|r| < 1) \text{ の形ができれば,}$$

$$|a_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ より, } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \text{ が成り立つ。}$$

解

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ だから,

$$a_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + a_n} \text{ において, } \alpha = 1 + \sqrt{1 + \alpha} \text{ が成り立つ。}$$

$$\therefore (\alpha - 1)^2 = 1 + \alpha \quad \therefore \alpha^2 - 3\alpha = 0$$

これと $0 < \alpha < 3$ より, 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ であると推測できる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 3| = 0 \quad (|a_n - 3| \text{ は } a_n \text{ と } 0 \text{ の距離を表す。})$$

より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \text{ であることを示すには, } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 3| = 0 \text{ が成り立つことを示せばよい。}$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} |a_n - 3| &= |1 + \sqrt{1 + a_{n-1}} - 3| \\ &= |\sqrt{1 + a_{n-1}} - 2| \\ &= \left| (\sqrt{1 + a_{n-1}} - 2) \times \frac{\sqrt{1 + a_{n-1}} + 2}{\sqrt{1 + a_{n-1}} + 2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{1 + a_{n-1}} + 2} \right| \times |(\sqrt{1 + a_{n-1}} - 2)(\sqrt{1 + a_{n-1}} + 2)| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{1 + a_{n-1}} + 2} \right| |a_{n-1} - 3| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + a_{n-1}} + 2} |a_{n-1} - 3| \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } 0 < a_{n-1} < 3 \text{ だから, } 3 < \sqrt{1 + a_{n-1}} + 2 < 4 \quad \therefore \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{1 + a_{n-1}} + 2} < \frac{1}{3}$$

$$\text{よって, } |a_n - 3| \leq \frac{1}{3} |a_{n-1} - 3| \quad \therefore |a_n - 3| = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |a_1 - 3|$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 3| = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

補足：グラフから推測する方法

$a_{n+1} = f(a_n)$ は,

$a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2), \dots, a_k = f(a_{k-1}), a_{k+1} = f(a_k), \dots$ より,

$y = f(x)$ とすると,

a_n は, a_{n+1} にとっての定義域の数かつ a_{n-1} にとっての値域の数である。

したがって, $y = x$ を利用して a_n を値域を定義域の間で入れ替えることにより,

つまり,

x 軸に a_n をとると, $y = a_{n+1} = f(a_n)$ より, a_{n+1} は y 軸の値になる。

次に, a_{n+1} を x 軸にとる場合, $y = a_{n+1}$ と $y = x$ の交点の x 座標をとればよい。

このとき, $y = a_{n+2} = f(a_{n+1})$ より, a_{n+2} は y 軸の値になる。

こうして, $a_{n+1} = f(a_n)$ において a_n がどのように変化していくかがわかる。