56

(1)

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x}\left(e^{2x} - 1\right)}{x} = 2e^{-x} \cdot \dfrac{e^{2x} - 1}{2x}$ より，

与式$= \lim_{x \to 0} 2e^{-x} \cdot \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$

e 関連の極限公式の導き方の流れ

e は主に次の 4 つの形で表現できる。

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

$$\lim_{h\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}=e$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$$

これらは以下に示すように相互変換できる。

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ から始める場合

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\frac{1}{x}=t$ とおく ↓

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

自然対数をとる ↓

$$\log\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e$$

$$\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$\log(1+x)=u$ とおくと，
$1+x=e^{u}$ より，
$x=e^{u}-1$ だから ↓

$$\lim_{u\to o}\frac{u}{e^{u}-1}=1$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u}=1$$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ から始める場合

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$\downarrow$ $e^x-1=t$ とおく

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}=1$$

よって,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$$

また,

$$\begin{aligned}右辺&=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}\\&=\log\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\end{aligned}$$

左辺 $=1=\log e$ より,

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

$\downarrow$ $\frac{1}{t}=u$ とおく

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$$

補足

指数関数 $y=f(x)=a^x\,(a>0, a\neq 1)$ において,

e は次のように定義される。

$y=f(x)=a^x\,(a>0, a\neq 1)$ のうち,

$x=0$ における接線の傾きが 1 であるものを $y=e^x$ とする。

よって,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-0}=1 \text{ より,}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$