

56

(1)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{x} = 2e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \text{ より,}$$

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

e 関連の極限公式の導き方の流れ

e は主に次の 4 つの形で表現できる。

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

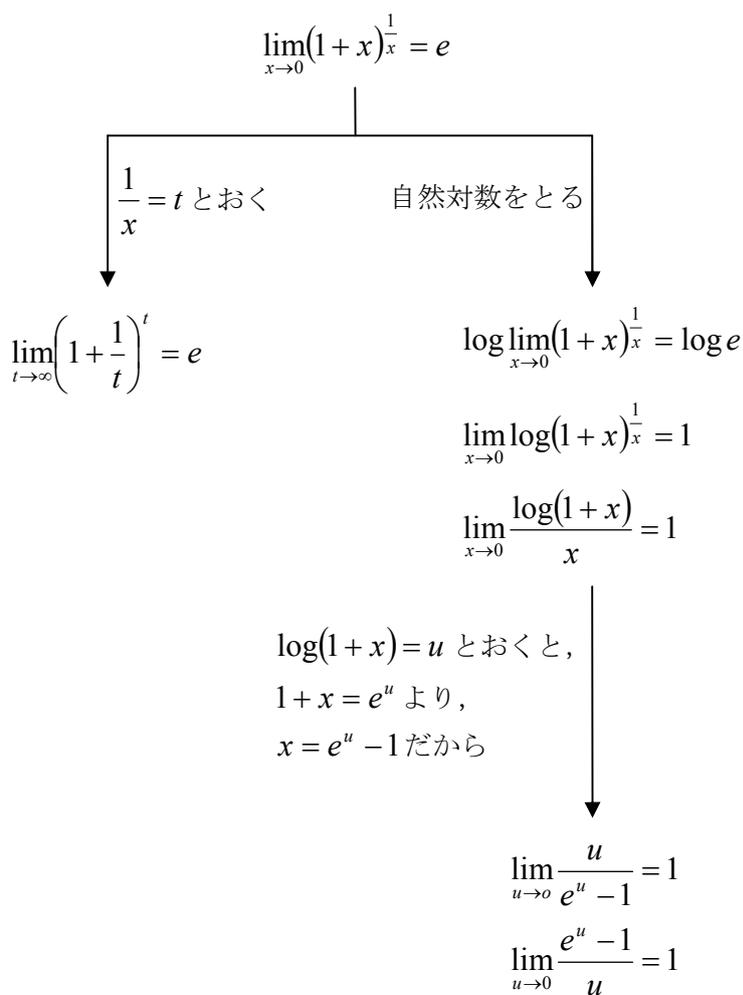
$$\lim_{h \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$$

これらは以下に示すように相互変換できる。

$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ から始める場合



$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ から始める場合

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

↓ $e^x - 1 = t$ とおく

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log(1+t)} = 1$$

よって,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

また,

$$\text{右辺} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \log \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

左辺 = 1 = $\log e$ より,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

↓ $\frac{1}{t} = u$ とおく

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

補足

指数関数 $y = f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) において,

e は次のように定義される。

$y = f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) のうち,

$x = 0$ における接線の傾きが 1 であるものを $y = e^x$ とする。

よって,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = 1 \text{ より,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$