

$x = u^{\log_u x}$ の活用 $x = u^{\log_u x}$ を関数の定義から導いてみる

対数関数は指数関数の逆関数として定義された関数である。

つまり, $f(x) = u^x$ の逆関数は, $f^{-1}(x) = \log_u x$ である。

関数とその逆関数の合成関数について

 $x = f \circ f^{-1}(x)$, $x = f^{-1} \circ f(x)$ が成り立つから,

$$x = f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = u^{f^{-1}(x)} = u^{\log_u x} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = \log_u f(x) = \log_u u^x \quad \dots \textcircled{2}$$

($x = \log_u u^x$ については慣れ親しんでいるので違和感なく受け入れられるだろう)

①, ②より,

$$x = u^{\log_u x} = \log_u u^x$$

とくに, $u = e$ のとき,

$$x = e^{\log x} = \log e^x$$

したがって,

関数 $g(t) = e^t$ とその逆関数 $g^{-1}(t) = \log t$ について, $t = e^{\log t}$ (重要関係式) が成り立つから,

$$t = a^x \text{ とおくと, } a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

$$\text{ゆえに, } a^x = e^{x \log a}$$

あるいは,

$$t = a \text{ とおくと, } a = e^{\log a} \text{ だから, } a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

$$\text{ゆえに, } a^x = e^{x \log a}$$

まとめ

$$x \xrightarrow{\log_u X} \log_u x \xrightarrow{u^X} u^{\log_u x} = x$$

$$a^x \xrightarrow{\log_u X} \log_u a^x \xrightarrow{u^X} u^{\log_u a^x} = u^{x \log_u a} = x$$

$$x \xrightarrow{\log X} \log x \xrightarrow{e^X} e^{\log x} = x$$

$$a^x \xrightarrow{\log X} \log a^x \xrightarrow{e^X} e^{\log a^x} = e^{x \log a} = a^x$$

楽な導き方

$a^x = e^t$ とおき, 両辺の自然対数をとると, $t = x \log a$

よって, $a^x = e^{x \log a}$

$a^x = e^{x \log a}$ の微積分計算での活用

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C \quad (a \text{ は } 1 \text{ でない正数, } C \text{ は積分定数})$$

$$(a^x)' = a^x \log a \quad (a \text{ は } 1 \text{ でない正数})$$

が楽に導ける。

$$\int a^x dx = \int e^{x \log a} dx = \frac{1}{(x \log a)'} e^{x \log a} + C = \frac{1}{\log a} a^x + C$$

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = (x \log a)' e^{x \log a} = \log a \cdot e^{x \log a} = \log a \cdot a^x = a^x \log a$$

以上より,

a^x 型を e^t 型に変換すると a^x の微積分の計算が楽になるのがわかる。

したがって, $a^x = e^{x \log a}$ を自分で導けるようにしておこう。

補足

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C \quad (a \text{ は } 1 \text{ でない正数}) \text{ のふつうの導き方}$$

$y = a^x$ とおき, 両辺の対数をとると, $\log y = x \log a$

両辺を x で微分すると,

$$\frac{d \log y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \log a$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \log a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \log a \cdot y$$

$$\therefore \frac{da^x}{dx} = \log a \cdot a^x$$

$$\therefore \frac{1}{\log a} da^x = a^x dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{\log a} da^x = \int a^x dx$$

$$\therefore \int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C$$

手続きが多く, 能率が悪い。

$t = e^{\log t}$ の活用 (重要)

基本形 $t = e^{\log t}$ または $t = u^{\log_u t}$ の t に適当な数値または式を代入することにより,

$a^x = e^{x \log a}$ のみならず, 様々な $e^{\log t}$ や $u^{\log_u t}$ を自在につくることができる。

たとえば,

$$a^{\log x} = e^{\log a^{\log x}} = e^{\log x \cdot \log a} = (e^{\log x})^{\log a} = x^{\log a} \quad (\text{または, } a^{\log x} = (e^{\log a})^{\log x} = (e^{\log x})^{\log a} = x^{\log a})$$

したがって, 重要なのは, $a^x = e^{x \log a}$ ではなく,

むしろ, $t = e^{\log t}$ または $t = u^{\log_u t}$ である。