71

別解

68 で解説した $x = u^{\log_u x}$ を活用する。

紛らわしさを避ける目的で $x = u^{\log_u x}$ の x を t にし、さらに底 u を底 e にすると、

$$t = e^{\log t}$$

この t に $x^{\sqrt{x}}$ を代入すると、

$$x^{\sqrt{x}} = e^{\log x^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x} \log x}$$

よって、

$$\begin{aligned} (x^{\sqrt{x}})' &= (e^{\sqrt{x} \log x})' \\ &= (\sqrt{x} \log x)' e^{\sqrt{x} \log x} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \right) x^{\sqrt{x}} \quad (\because x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \log x}) \\ &= \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$