

95

無理数の指数計算とはさみうちのテクニック

無理数の指数の近似値は、無理数の指数を直接計算するのではなく、
無理数の近傍の適当な数の指数を計算し、はさみうちせよ。

$e^{\frac{1}{2}}$ の大きさについて

$$1 < e^{\frac{1}{2}} < 2 \Leftrightarrow 1 < e < 4$$

$1 < e < 4$ は真だから、 $1 < e^{\frac{1}{2}} < 2$ は真である。よって、 $1 < e^{\frac{1}{2}} < 2$

$e^{\frac{5}{6}}$ の大きさについて

$$e^{\frac{5}{6}} < e < 3 \text{ は明らか。}$$

$$2 < e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow 2^6 < e^5$$

e^5 の計算は大変なので、

e より小さくかつ e に近い数 $\frac{5}{2}$ を用いて 2^6 と $\left(\frac{5}{2}\right)^5$ の大きさを比較する。

このはさみうちのようなテクニックは、

無理数の指数の近似値を求めたり大きさを比較したりするときの常套手段で重要である。

$$\left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{5^5}{2^5} = \frac{3125}{2^5} > \frac{2^{11}}{2^5} = 2^6$$

よって、

$$2^6 < \left(\frac{5}{2}\right)^5 < e^5 \quad \therefore 2 < e^{\frac{5}{6}}$$

以上より、 $2 < e^{\frac{5}{6}} < 3$

補足

$$\left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{5^5}{2^5} = \frac{3125}{2^5} > \frac{2^{11}}{2^5} = 2^6 \text{ について、} \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{5^5}{2^5} = \frac{3125}{32} \approx 98 > 2^6 \text{ としてもよいが、}$$

$2^6 = 2048$ を利用する方が数学らしい。

尚、 $2^{10} = 1024$ は使用頻度の高い指数なので覚えておくこと。