97

別解

$a=0$ とすると，$f(x)=0$ より不適。よって，$a\neq 0$

したがって，$\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}=\sqrt{3}$ とおくと，$\dfrac{\sin x}{\cos x+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{a}$ に変形できる。

ここで，$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\ (0\leq x\leq \pi)$ とすれば,

$f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}\ (0\leq x\leq \pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるように a の値を定めることと

$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\ (0\leq x\leq \pi)$ の最大値が $\dfrac{\sqrt{3}}{a}$ となるように a の値を定めることは同じである。

$g'(x)=\dfrac{1+2\cos x}{(\cos x+2)^2}$ より，$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\ (0\leq x\leq \pi)$ の増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\uparrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\downarrow$	0

よって，$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\ (0\leq x\leq \pi)$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore a=3$

テキスト別解について

$a=0$ とすると，$f(x)=0$ より不適。よって，$a\neq 0$

したがって，$\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}=\sqrt{3}$ とおくと，$\dfrac{\sin x}{\cos x+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{a}$ に変形できる。

ここで，半径 1 の単位円の円周上の点を $\mathrm{P}(\cos x,\sin x)$ とすると，

$\dfrac{\sin x}{\cos x+2}=\dfrac{\sin x-0}{\cos x-(-2)}$ より，定点 $(-2,0)$ と点 P を通る直線の傾きを表す。

$f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leq x\leq \pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるように a の値を定めることと

$\dfrac{\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leq x\leq \pi)$ の最大値が $\dfrac{\sqrt{3}}{a}$ となるように a の値を定めることは同じであるから，

この傾向の最大値が $\dfrac{\sqrt{3}}{a}$ となるように a の値を定めればよい。

以下略

$f(x)=\dfrac{r\sin x-b}{r\cos x-a}$ 型

図形的に考察することができる。

$\mathrm{A}(a,b)$，$\mathrm{P}(r\cos x, r\sin x)$とおくと，点 A は定点，点 P は半径$r$ の円周上の点を表す。

したがって，$f(x)$は点 A から半径r の円周上の点 P に引いた直線の傾きを表す。

この方法は，図形と方程式の問題や微分の問題の解説でよく別解として紹介される有名なテクニックなので覚えておくのが望ましい。