

111

 $x = u^{\log_u x}$ の微積分の計算への活用

$x = u^{\log_u x}$ を関数の定義から導いてみる

対数関数と指数関数は互いに逆関数の関係にある

したがって, $f(x) = \log_u x$ の逆関数は, $f^{-1}(x) = u^x$ である。

関数とその逆関数の合成関数

$$x \xrightarrow[\leftarrow]{f} f(x) \text{ より, } f^{-1} \circ f(x) = x \text{ あるいは, } f^{-1}(f(x)) = x$$

矢印の向きを逆にすると,

$$x \xrightarrow[\leftarrow]{f^{-1}} f^{-1}(x) \text{ より, } f \circ f^{-1}(x) = x \text{ あるいは, } f(f^{-1}(x)) = x$$

よって,

$$x = f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) \quad (\text{あるいは, } f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)))$$

$x = u^{\log_u x}$ について

$f(x) = \log_u x$ とその逆関数 $f^{-1}(x) = u^x$ について,

$$x = f^{-1} \circ f(x) \text{ より, } x = u^{f(x)} = u^{\log_u x}$$

よって, $x = u^{\log_u x}$

補足 1: 楽な導き方

$$x = u^t \text{ おき, 底を } u \text{ とする対数をとると, } \log_u x = t \quad \therefore x = u^{\log_u x}$$

補足 2

$$x = f \circ f^{-1}(x) = \log_u f^{-1}(x) = \log_u u^x \quad \therefore x = \log_u u^x$$

については, 慣れ親しんでいるので違和感なく受け入れられるだろう。

$t = u^{\log_u t}$ において $u = e$ とすると微積分の計算処理が楽になる。

$$t = u^{\log_u t} \text{ において, } u = e \text{ とすると, } t = e^{\log t}$$

微分処理への活用例

$t = a^x$ の場合,

$$a^x = e^{\log a^x} \text{ より, } a^x = e^{x \log a}$$

$$\text{よって, } (a^x)' = (e^{x \log a})' = (x \log a)' e^{x \log a} = \log a \cdot e^{x \log a} = \log a \cdot a^x$$

積分処理への活用例

$t = a^x$ の場合,

$$a^x = e^{\log a^x} \text{ より, } a^x = e^{x \log a}$$

よって,

$$\int a^x dx = \int e^{x \log a} dx = \frac{1}{(x \log a)'} e^{x \log a} + C = \frac{1}{\log a} a^x + C$$