132

$Ae^{ax}\cos bx+Be^{ax}\sin bx$ 型の積分：連立方程式の利用

$$\left(e^{ax}\cos bx\right)'=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx \quad \cdots①$$

$$\left(e^{ax}\sin bx\right)'=be^{ax}\cos bx+ae^{ax}\sin bx \quad \cdots②$$

①×$-b$＋②×a より，

$$-b\left(e^{ax}\cos bx\right)'+a\left(e^{ax}\sin bx\right)'=\left(a^2+b^2\right)e^{ax}\sin bx$$

$$\therefore\left(-\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx\right)'=e^{ax}\sin bx$$

$$\therefore\int e^{ax}\sin bx dx=-\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$$

①×a＋②×b より，

$$a\left(e^{ax}\cos bx\right)'+b\left(e^{ax}\sin bx\right)'=\left(a^2+b^2\right)e^{ax}\cos bx$$

$$\therefore\left(\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx\right)'=e^{ax}\cos bx$$

$$\therefore\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$$