142

$x^2 f'(x)$の原始関数を$G(x)$とすると，

$$f(x)=x^2+\int_0^x t^2 f'(t)dt$$
$$=x^2+\left[G(t)\right]_0^x$$
$$=x^2+G(x)+G(0)$$

ここで，$G(x)=x^2 f'(x)$だから，

両辺をxについて微分すると，

$$f'(x)=2x+G'(x)$$
$$=2x+x^2 f'(x)$$

$-1<x<1$より，

$$f'(x)=\frac{2x}{1-x^2}=-\frac{\left(1-x^2\right)'}{1-x^2}$$

よって，

$$f(x)=\int f'(x)dx=-\log\left(1-x^2\right)+C$$

また，与式より，$f(0)=0^2+\int_0^0 t^2 f'(t)dt=0$

これと$f(0)=-\log 1+C=C$より，$C=0$

よって，$f(x)=-\log\left(1-x^2\right)$