147

部分積分は次数下げの積分でもあるから，

被積分関数の次数が等差数列をなす定積分の数列の漸化式をつくる場合，

部分積分が有効である。

補足

I_nとI_{n-1}の間に成り立つ漸化式

$I_{n-1}=\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$ より，$(n-1)!I_{n-1}=\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n e^{-x}dx&=\left[x^n\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx\\&=-\frac{1}{e}+n(n-1)!I_{n-1}\\&=-\frac{1}{e}+n!I_{n-1}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{e}+n!I_{n-1}\right)\\&=-\frac{1}{en!}+I_{n-1}\end{aligned}$$

$\therefore I_n-I_{n-1}=-\dfrac{1}{en!}\ (n\geq 2)$ ← 階差数列

$$\begin{aligned}\therefore I_n&=I_1+(I_2-I_1)+(I_3-I_2)+\cdots+(I_n-I_{n-1})\\&=I_1+\sum_{k=2}^{n}(I_k-I_{k-1})\\&=1-\frac{2}{e}-\frac{1}{e}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$