151

$\frac{k}{n}$ と $\frac{1}{n}$ の式形 $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ をつくり，$x_k=\frac{k}{n}$ とし k の範囲から積分区間を求め，

それが $[a,b]$ ならば $\int_a^b f(x)dx$ とすればよい場合が多い。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+3+\cdots+n)^5}{(1+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2}=\frac{\lim_{n\to\infty}(1+2+3+\cdots+n)^5}{\lim_{n\to\infty}(1+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+2+3+\cdots n)^5&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^5\\&=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k\right)^5\\&=\left\{\lim_{n\to\infty}\left(n^2\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)\right\}^5\\&=\left(\lim_{n\to\infty}n^2\right)^5\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^5\\&=\lim_{n\to\infty}n^{10}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\right)^5\\&=\lim_{n\to\infty}n^{10}\cdot\left(\int_0^1 xdx\right)^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k^4\right)^2\\&=\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k^4\right)^2\\&=\left[\lim_{n\to\infty}\left\{n^5\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right\}\right]^2\\&=\left\{\lim_{n\to\infty}n^5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right\}^2\\&=\left(\lim_{n\to\infty}n^5\right)^2\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\right\}^2\\&=\lim_{n\to\infty}n^{10}\cdot\left(\int_0^1 x^4dx\right)^2\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+3+\cdots+n)^5}{(1+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2}=\frac{\left(\int_0^1 xdx\right)^5}{\left(\int_0^1 x^4dx\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{25}}$$

$$=\frac{25}{32}$$