

153

定積分の定義と区分求積法

定積分の定義式

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad \left(x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k \right)$$

定義式の解説

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとき,

閉区間 $[a, b]$ を n 等分すると区間幅 $= \frac{b-a}{n}$

また, 区間の区切りの点を $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$ ($0 \leq k \leq n-1$ または $1 \leq k \leq n$) と定めると,

区間幅 $\frac{b-a}{n}$ と $f(x_k)$ の積 n 個の和は n が大きくなるに従い, $\int_a^b f(x)dx$ の値により近くなる。

つまり, n が十分大きいと,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \text{ かつ } \int_a^b f(x)dx \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \text{ が成り立つ。}$$

よって,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad \left(x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k \right)$$

となる。

尚, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n}$ は dx , $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma$ は $\int$ にあたる。

区分求積法

$f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$, 2 直線 $x = a$, $x = b$ および x 軸で囲まれた部分の面積を

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \left(x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k \right)$$

または,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad \left(x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k \right)$$

で求める方法を区分求積法という。

無限級数から定積分へ

定積分から無限級数への逆を辿る無難な処理の流れ

$\frac{k}{n}$ と $\frac{1}{n}$ の式形 $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ づくり, $x_k = \frac{k}{n}$ とし k の範囲から積分区間を求め,

それが $[a, b]$ ならば $\int_a^b f(x) dx$ とすればよい場合が多いが, そうもいかない場合もあるので,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=pn}^{qn} a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=pn}^{qn} \left(\frac{qn - pn + 1}{qn - pn + 1} \right)^m a_k \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=pn}^{qn} \left\{ \frac{1}{qn - pn + 1} f(x_k) \cdot g(n) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{qn - pn + 1} \sum_{k=pn}^{qn} f(x_k) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \\
 &= \int_a^b f(x) dx \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=pn}^{qn} a_k} \right\} \text{解説}$$

解説

$\left(\frac{qn - pn + 1}{qn - pn + 1} \right)^m a_k$ について

定積分の定義式の $x_k = a + \frac{b-a}{n}$ の n は, $\sum_{k=1}^n f(x_k)$ の項数 n を表す。

x_k をつくるに当たり, $\sum_{k=pn}^{qn} a_k$ の項数が $qn - pn + 1$ だから,

a_k の k を含む項に k と同じ次数の $\left(\frac{1}{qn - pn + 1} \right)^l$ を掛け,

$\left(\frac{k}{qn - pn + 1} \right)^l$, つまり $\left(\frac{k}{\text{項数}} \right)^l$ の形をつくる。

たとえば, 項数が n であれば $\left(\frac{k}{n} \right)^l$, $2n$ であれば $\left(\frac{k}{2n} \right)^l$ といった具合に。

また, 定積分の定義式の区間幅 $\frac{b-a}{n}$ の n も $\sum_{k=1}^n f(x_k)$ の項数だから,

この場合は区間幅 $\frac{1}{qn - pn + 1}$ をつくる。

たとえば, 項数が n であれば $\frac{1}{n}$, $2n$ であれば $\frac{1}{2n}$ といった具合に。

これらをつくるための前処理として, $\left(\frac{qn - pn + 1}{qn - pn + 1} \right)^m a_k$ としたのである。

尚, $g(n)$ は, その際生じた副産物である。

x_k について

x_k の設定の仕方は比較的自由に、 k についての 1 次式の部分を x_k とすればよい。

たとえば、 $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^l$ ならば、 $x_k = 1 + \frac{k}{n}$ としてもよいし、 $x_k = \frac{k}{n}$ としてもよい。

とくに慎重になる必要はない。

設定に応じて関数 $f(x_k)$ と積分区間が平行移動するだけで問題ない。

尚、積分区間 β と α は $x_{pn} \leq x_k \leq x_{qn}$ より、 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{pn}$ 、 $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{qn}$ である。

補足

項数を $\frac{1}{qn - pn}$ としたいのなら、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=pn}^{qn} a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=pn+1}^{qn} a_k + a_{pn} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=pn+1}^{qn} a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{pn} \end{aligned}$$

と変形し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=pn+1}^{qn} a_k$ を扱えばよい。

解法 1 : 項数を変えずそのまま解く。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+1}{n+k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+1}{\frac{2n-n+1}{n+k} \cdot \frac{2n-n+1}{n+k}} \quad \leftarrow \text{標的は } k \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+1}{n+k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\frac{n+k}{n+1}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n+1 + (k-1)} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n+1}} \\
 &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n+1}} \quad \leftarrow \text{区間幅 } \frac{1}{n+1} \text{ をつくるのが目的} \\
 &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n+1}} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n+1}}
 \end{aligned}$$

$\frac{n+1}{n+k}$ から直接 $\frac{1}{n+1}$ が得られるが、
 解説に忠実に処理した。

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n+1}} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n+1}} \right) \\
 &= 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n+1}}
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \frac{k-1}{n+1} = x_k \text{ とおくと, } \frac{n-1}{n+1} \leq x_k \leq \frac{2n-1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \leq x \leq 2$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+1}{n+k} \right) &= \int_1^2 \frac{dx}{1+x} \\ &= [\log|1+x|]_1^2 \\ &= \log \frac{3}{2}\end{aligned}$$

解法 2: 項数を n にして解く。

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+1}{n+k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n+1}{n+k} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+k}{n}} + \frac{n+1}{2n^2} \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\frac{n+k}{n}} + \frac{n+1}{2n^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} + \frac{n+1}{2n^2} \right)\end{aligned}$$

どこで Σ の項数を n にしてもよい。



わかりやすさの目的で,

ここで Σ の項数を n にした。

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} + \frac{n+1}{2n^2} \right) \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} + \frac{n+1}{2n^2} \right) \\ &= 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}\end{aligned}$$

ここで $\frac{k}{n} = x_k$ とおくと, $\frac{n}{n} \leq x_k \frac{2n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{n+1}{n+k} \right) &= \int_1^2 \frac{dx}{1+x} \\ &= [\log|1+x|]_1^2 \\ &= \log \frac{3}{2}\end{aligned}$$

例題 無限級数から定積分へ

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2n+1)(2n+2) \cdots (2n+n)}{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

ポイント

積形の式ときたら対数

解

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \frac{(2n+1)(2n+2) \cdots (2n+n)}{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)} \right\}^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{2n+k}{n+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{2 + \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \left(\log \frac{2+x}{1+x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \{ \log(x+2) - \log(x+1) \} dx \\ &= [(x+2)\log(x+2) - x]_0^1 - [(x+1)\log(x+1) - x]_0^1 \\ &= \log \frac{27}{16} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2n+1)(2n+2) \cdots (2n+n)}{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)} \right\}^{\frac{1}{n}} &= \frac{27}{16} \end{aligned}$$

補足

積分は公式 $\int \log(x+a)dx = (x+a)\log(x+a) - x + C$ を使った。