

155

自然数を定義域とする関数 $\Rightarrow$ 数列 $\Rightarrow$ 数学的帰納法・積分の定義式・区分求積法

数列などの整数問題では、与えられた式を簡単な関数や図形で表し考えやすくする。

また,

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると,

$b \leq x \leq a$ において, $p \leq f(x) \leq q$ ならば $p(b-a) < \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) < q(b-a)$ だから,

与えられた不等式が, $p(b-a) < F(b) - F(a) < q(b-a)$ ではないか? と発想すれば,

$p(b-a) < \int_a^b f(x)dx < q(b-a)$ を得ることで, 不等式の意味を知ることができる場合がある。

(2)

(1)より, すべての自然数 n について

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n} \text{ より,}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^n \{\log(k+1) - \log k\} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \{\log(k+1) - \log k\} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \quad (n \geq 2)$$