156

グラフや図に表し，視覚的に考えよう。

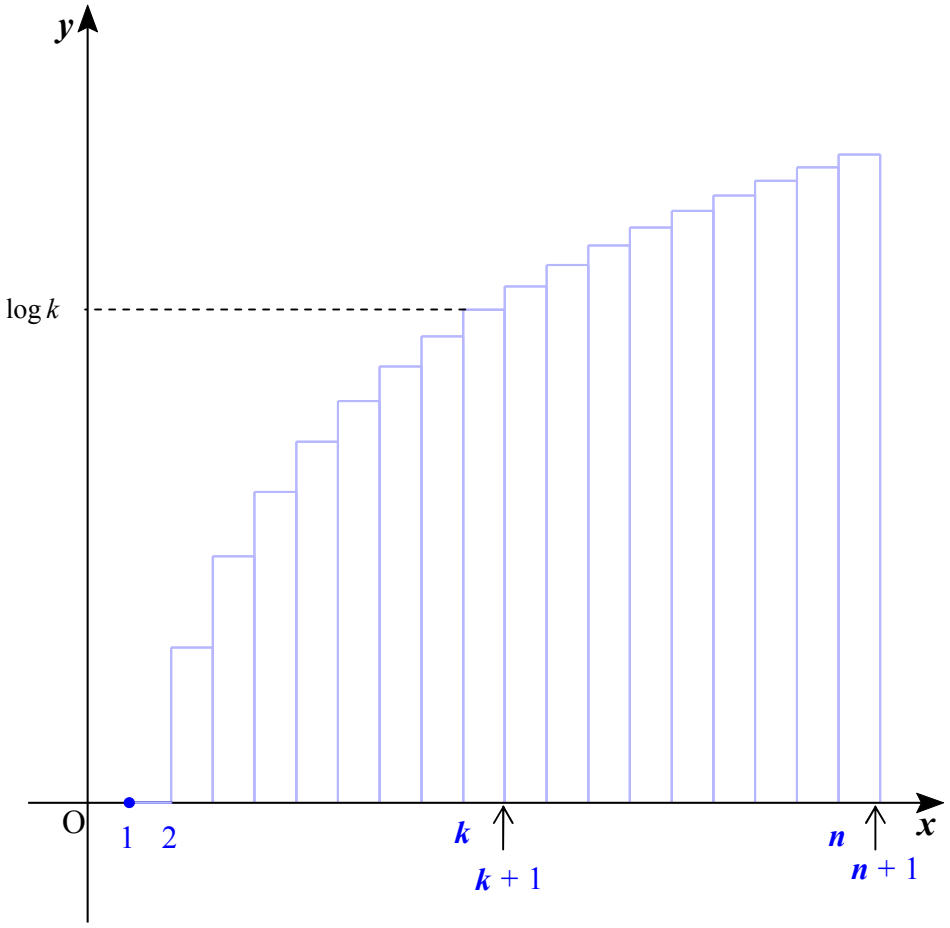
$\sum_{k=1}^{n} \log k$ が表す図形的意味を考えよう。

$$\sum_{k=1}^{n} \log k = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \cdots + \log k + \cdots + \log n$$

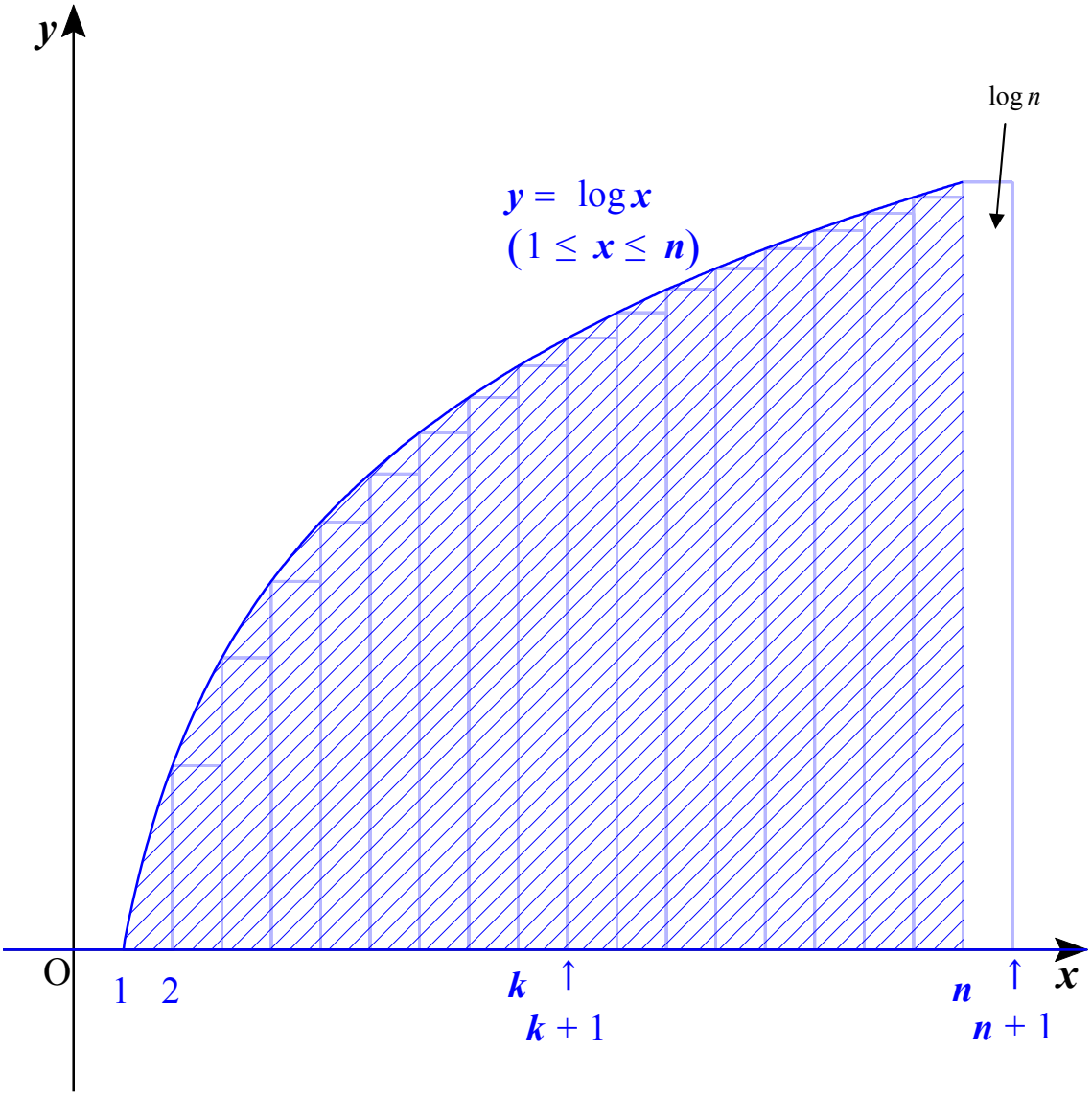
$$= 1 \times \log 1 + 1 \times \log 2 + 1 \times \log 3 + \cdots + 1 \times \log k + \cdots + 1 \times \log n$$

より，

$\sum_{k=1}^{n} \log k$ を xy 座標平面上に表すと，下図の長方形の面積の和となる。



これと $y=\log x\ (1\leq x\leq n)$ と x 軸で囲まれた部分の面積＋$\log n$ を比較すると，
下図のようになる。

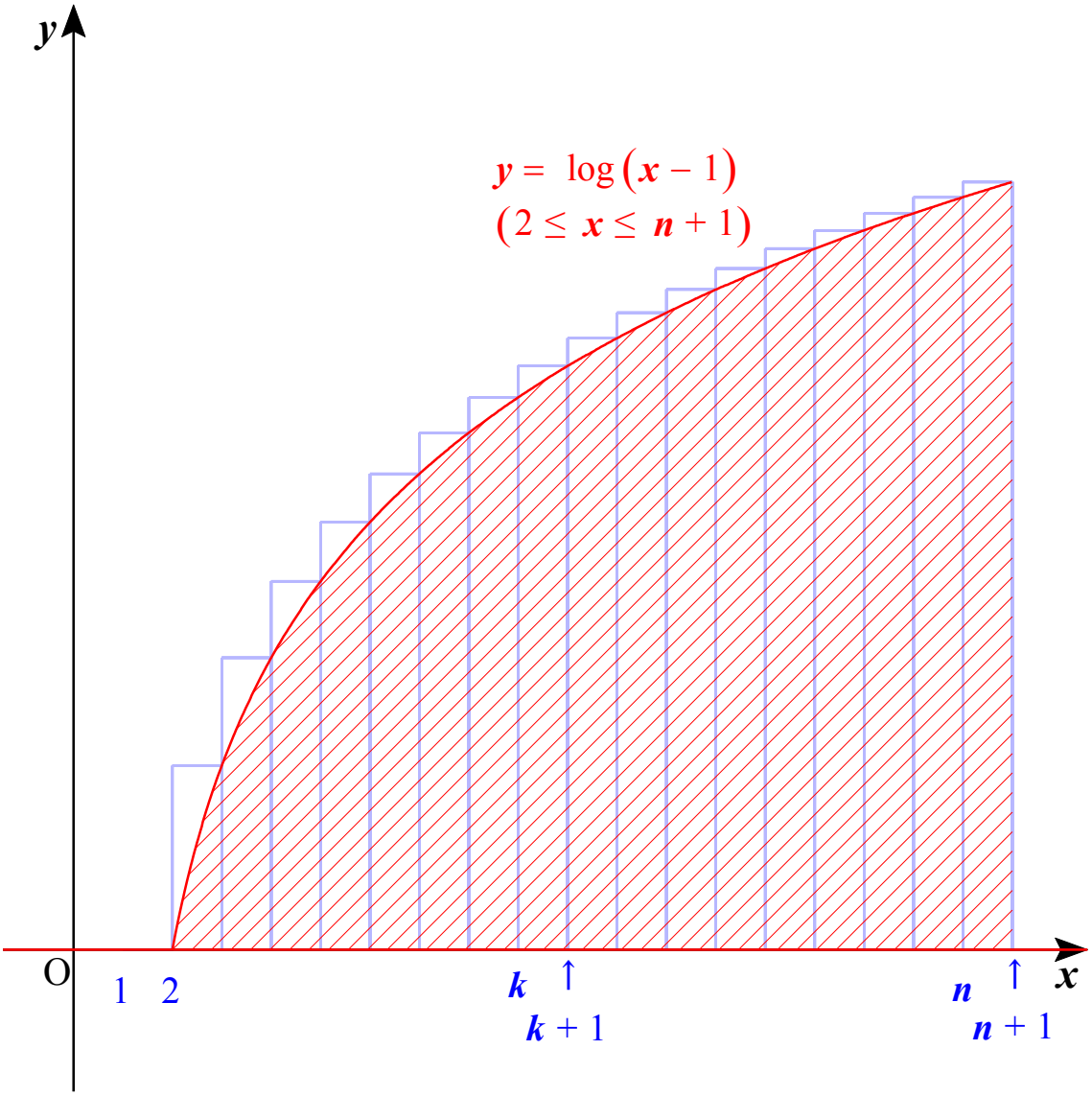


よって，

$$\sum_{k=1}^{n}\log k<\int_1^n\log x\,dx+\log n=\left[x\log x-x\right]_1^n+\log n$$
$$=n\log n-n+1+\log n$$
$$=(n+1)\log n-n+1$$

同様に，$y=\log(x-1)\ (2\le x\le n+1)$と$x$軸で囲まれた部分の面積と比較すると，

下図より，



$$\int_2^{n+1}\log(x-1)dx=\left[(x-1)\log(x-1)-x\right]_2^{n+1}=n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k$$

以上より，

$$n\log n-n+1<\sum_{k=1}^{n}\log k<(n+1)\log n-n+1$$