

181

別解

条件より放物線 C の方程式 $x^2 = 4py$ が得られる。

よって、放物線 C の点 Q における接線 l の傾きを $\tan \alpha$ とすると、

$$y' = \frac{x}{2p} \text{ より,}$$

$$\tan \alpha = \frac{x_0}{2p} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、直線 FQ 、すなわち直線 l_1 の傾きを $\tan \beta$ とすると、 $\tan \beta = \frac{\frac{x_0^2}{4p} - p}{x_0}$

よって、

$$\tan \beta = \frac{x_0^2 - 4p^2}{4px_0} \quad \dots \textcircled{2}$$

点 Q が第一象限にあるとき

直線 l_2 と直線 l とのなす角は、 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ だから、

①より、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2p}{x_0} \quad \dots \textcircled{3}$$

直線 l と直線 l_1 のなす角は、 $\alpha - \beta$ だから、

①、②より、

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{x_0}{2p} - \frac{x_0^2 - 4p^2}{4px_0}}{1 + \frac{x_0}{2p} \cdot \frac{x_0^2 - 4p^2}{4px_0}} = \frac{2p}{x_0} \quad \dots \textcircled{4}$$

よって、③、④より、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan(\alpha - \beta)$$

同様に、点 Q が第二象限にあるとき、

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \tan(\beta - \alpha) \text{ が成り立つ。}$$

ゆえに、題意が示された。