203

別解

平面曲線C上の任意の点を$\alpha[\mathrm{rad}]$回転移動した点を(X, Y)とすると，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\ -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

よって，平面曲線Cを$\alpha[\mathrm{rad}]$回転移動した曲線の方程式は，

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)^2 + (X\cos\alpha + Y\sin\alpha)(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + (-X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\therefore X^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + Y^2(\cos^2 + \sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) + XY(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 1$$

$$\therefore (1 - \sin\alpha\cos\alpha)X^2 + (1 + \sin\alpha\cos\alpha)Y^2 + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)XY = 1$$

ここで$\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$とすると，$\dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}Y^2 = 1$であり，

$\dfrac{X^2}{\frac{2}{3}} + \dfrac{Y^2}{2} = 1$より，これは楕円の方程式を表す。

この楕円は，$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta \\ Y = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$と媒介変数表示できる。

これと$\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$より，

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\ -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\sin\theta \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\sin\theta \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}} - \sin\theta \\ \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}} + \sin\theta \end{pmatrix} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

よって，題意が成り立つ。

補足

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ とすると，$\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{Y^2}{\frac{2}{3}}=1$ より，

この楕円は，$\begin{cases} X=\sqrt{2}\cos\theta \\ Y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta \end{cases}$ $\quad(0\leq\theta<2\pi)$ と媒介変数表示できる。

これと $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\therefore\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X\cos\alpha+Y\sin\alpha \\ -X\sin\alpha+Y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2}\cos\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}} \\ -\cos\theta+\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\quad(0\leq\theta<2\pi)$$

と媒介変数表示できる。