

数学Ⅱ・数学B

問 題	選 択 方 法
第 1 問	必 答
第 2 問	必 答
第 3 問	いずれか 2 問を選択し、 解答しなさい。
第 4 問	
第 5 問	
第 6 問	

第1問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 Oを原点とする座標平面上に2点A(6, 0), B(3, 3)をとり、線分ABを2 : 1に内分する点をP, 1 : 2に外分する点をQとする。3点O, P, Qを通る円をCとする。

(1) Pの座標は(,) であり, Qの座標は(,) である。

(2) 円Cの方程式を次のように求めよう。線分OPの中点を通り, OPに垂直な直線の方程式は

$$y = \text{カキ} x + \text{ク}$$

であり, 線分PQの中点を通り, PQに垂直な直線の方程式は

$$y = x - \text{ケ}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

これらの2直線の交点が円Cの中心であることから、円Cの方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{コ}}\right)^2 + \left(y + \boxed{\text{サ}}\right)^2 = \boxed{\text{シス}}$$

であることがわかる。

- (3) 円Cとx軸の二つの交点のうち、点Oと異なる交点をRとすると、Rは線分OAを $\boxed{\text{セ}}$: 1 に外分する。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

〔2〕 連立方程式

$$(*) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2^x + 2^y + 2^z = \frac{35}{2} \\ \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} = \frac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数 x, y, z を求めよう。ただし、 $x \leq y \leq z$ とする。

$X = 2^x, Y = 2^y, Z = 2^z$ とおくと、 $x \leq y \leq z$ により $X \leq Y \leq Z$ である。

(*) から、 X, Y, Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ = \boxed{\text{ソ}} \\ X + Y + Z = \frac{35}{2} \\ XY + YZ + ZX = \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \end{cases}$$

が得られる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

この関係式を利用すると、 t の 3 次式 $(t - X)(t - Y)(t - Z)$ は
 $(t - X)(t - Y)(t - Z) = t^3 - (X + Y + Z)t^2 + (XY + YZ + ZX)t - XYZ$

$$= t^3 - \frac{35}{2}t^2 + \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}t - \boxed{\text{ソ}}$$

$$= \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \boxed{\text{テ}}\right)\left(t - \boxed{\text{トナ}}\right)$$

となる。したがって、 $X \leq Y \leq Z$ により

$$X = \frac{1}{2}, Y = \boxed{\text{テ}}, Z = \boxed{\text{トナ}}$$

となり、 $x = \log_{\boxed{\text{二}}} X$, $y = \log_{\boxed{\text{二}}} Y$, $z = \log_{\boxed{\text{二}}} Z$ から

$$x = \boxed{\text{又ネ}}, y = \boxed{\text{ノ}}, z = \boxed{\text{ハ}}$$

であることがわかる。

数学Ⅱ・数学B

第2問 (必答問題) (配点 30)

a を正の実数として、 x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3$$

とする。

関数 $y = f(x)$ は、 $x = \boxed{\text{アイ}}$ で極大値 $\boxed{\text{ウ}} a^{\boxed{\text{エ}}}$ をとり、 $x = \boxed{\text{オ}}$

で極小値 $\boxed{\text{カ}} a^{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。このとき、2点

$$\left(\boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}} a^{\boxed{\text{エ}}} \right), \left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}} a^{\boxed{\text{キ}}} \right)$$

と原点を通る放物線

$$y = \boxed{\text{ク}} x^2 - \boxed{\text{ケ}} a^{\boxed{\text{コ}}} x$$

を C とする。原点における C の接線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{サシ}} a^{\boxed{\text{ス}}} x$$

である。また、原点を通り l に垂直な直線 m の方程式は

$$y = \frac{1}{\boxed{\text{セ}} a^{\boxed{\text{ソ}}}} x$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線

$$y = - \boxed{\text{ク}} x^2 + \boxed{\text{ケ}} a \boxed{\text{コ}} x$$

を D とする。 D と l で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\text{カチ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は、 0 と $\frac{4a \boxed{\text{ト}} + 1}{2a \boxed{\text{チ}}}$ である。 C と m で囲

まれた図形の面積を T とする。 $S = T$ となるのは $a \boxed{\text{テ}} = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときであ

り、このとき、 $S = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

第3問 (選択問題) (配点 20)

(1) 数列 $\{p_n\}$ は次を満たすとする。

$$p_1 = 3, p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

数列 $\{p_n\}$ の一般項と、初項から第 n 項までの和を求めよう。まず、①から

$$p_{n+1} - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} = \frac{1}{3} \left(p_n - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となるので、数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$p_n = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}} \cdot \boxed{\text{エ}}^{n-2}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。したがって、自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n p_k = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \left(1 - \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}^n} \right) + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} n$$

である。

(2) 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ は、初項から第3項が $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 3$ であり、すべての自然数 n に対して

$$a_{n+3} = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+2}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を満たすとする。また、数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を、自然数 n に対して、 $b_n = a_{2n-1}, c_n = a_{2n}$ で定める。数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよう。まず、②から

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2}{a_3} = \boxed{\text{シ}}, a_5 = 3, a_6 = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}, a_7 = 3$$

である。したがって、 $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 3$ となるので

$$b_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

と推定できる。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)

③を示すためには、 $b_1 = 3$ から、すべての自然数 n に対して

$$b_{n+1} = b_n \quad \dots\dots\dots ④$$

であることを示せばよい。このことを「まず、 $n = 1$ のとき④が成り立つことを示し、次に、 $n = k$ のとき④が成り立つと仮定すると、 $n = k + 1$ のときも④が成り立つことを示す方法」を用いて証明しよう。この方法を ソ という。 ソ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 組立除法 ② 弧度法 ③ 数学的帰納法 ④ 背理法

[I] $n = 1$ のとき、 $b_1 = 3$ 、 $b_2 = 3$ であることから④は成り立つ。

[II] $n = k$ のとき、④が成り立つ、すなわち

$$b_{k+1} = b_k \quad \dots\dots\dots ⑤$$

と仮定する。 $n = k + 1$ のとき、②の n に $2k$ を代入して得られる等式と、 $2k - 1$ を代入して得られる等式から

$$b_{k+2} = \frac{c_k + \text{タ}_{k+1}}{\text{チ}_{k+1}}, \quad c_{k+1} = \frac{\text{ツ}_k + c_k}{\text{テ}_{k+1}}$$

となるので、 b_{k+2} は

$$b_{k+2} = \frac{(\text{ト}_k + \text{ナ}_{k+1}) \text{ニ}_{k+1}}{b_k + c_k}$$

と表される。したがって、⑤により、 $b_{k+2} = b_{k+1}$ が成り立つので、④は $n = k + 1$ のときにも成り立つ。

[I]、[II]により、すべての自然数 n に対して④の成り立つことが証明された。したがって、③が成り立つので、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 3$ である。

次に、②の n を $2n - 1$ に置き換えて得られる等式と③から

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となり、 $c_1 = \text{ヌ}$ であることと①から、数列 $\{c_n\}$ の一般項は、(1)で求めた数列 $\{p_n\}$ の一般項と等しくなることがわかる。

第4問 (選択問題) (配点 20)

OA = 5, OC = 4, $\angle AOC = \theta$ である平行四辺形 OABC において, 線分 OA を 3 : 2 に内分する点を D とする。また, 点 A を通り直線 BD に垂直な直線と直線 OC の交点を E とする。ただし, $0 < \theta < \pi$ とする。

以下, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおき, 実数 t を用いて $\vec{OE} = t\vec{c}$ と表す。

(1) t を $\cos \theta$ を用いて表そう。

$$\vec{AE} = t\vec{c} - \vec{a}, \vec{DB} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{ウエ}} \cos \theta$$

となるので, $\vec{AE} \cdot \vec{DB} = \boxed{\text{オ}}$ により

$$t = \frac{\boxed{\text{カ}} \left(\boxed{\text{キ}} \cos \theta + 1 \right)}{\boxed{\text{ク}} \left(\cos \theta + \boxed{\text{ケ}} \right)} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

(2) 点 E は線分 OC 上にあるとする。θ のとり得る値の範囲を求めよう。ただし, 線分 OC は両端の点 O, C を含むものとする。以下, $r = \cos \theta$ とおく。

点 E が線分 OC 上にあることから, $0 \leq t \leq 1$ である。 $-1 < r < 1$ なので, ① の右辺の $\cos \theta$ を r に置き換えた分母 $\boxed{\text{ク}} \left(r + \boxed{\text{ケ}} \right)$ は正である。したがって, 条件 $0 \leq t \leq 1$ は

$$0 \leq \boxed{\text{カ}} \left(\boxed{\text{キ}} r + 1 \right) \leq \boxed{\text{ク}} \left(r + \boxed{\text{ケ}} \right) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

r についての不等式②を解くことにより、 θ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} \leq \theta \leq \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$$

であることがわかる。

(3) $\cos \theta = -\frac{1}{8}$ とする。直線 AE と直線 BD の交点を F とし、三角形 BEF の

面積を求めよう。①により、 $t = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ となり

$$\vec{OF} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \vec{c}$$

となる。したがって、点 F は線分 AE を 1 : $\boxed{\text{テ}}$ に内分する。このこと

と、平行四辺形 OABC の面積は $\frac{\boxed{\text{トナ}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{又}}}$ であることから、三角形

BEF の面積は $\frac{\boxed{\text{ネ}} \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第5問 (選択問題) (配点 20)

次の表は、あるクラスの生徒10人に対して行われた国語と英語の小テスト(各10点満点)の得点をまとめたものである。ただし、小テストの得点は整数値をとり、 $C > D$ である。また、表の数値はすべて正確な値であり、四捨五入されていない。

番 号	国 語	英 語
生徒1	9	9
生徒2	10	9
生徒3	4	8
生徒4	7	6
生徒5	10	8
生徒6	5	C
生徒7	5	8
生徒8	7	9
生徒9	6	D
生徒10	7	7
平均値	A	8.0
分 散	B	1.00

以下、小数の形で解答する場合、指定された桁数^{けた}の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで○にマークすること。

- (1) 10人の国語の得点の平均値Aは ア . イ 点である。また、国語の得点の分散Bの値は ウ . エオ である。さらに、国語の得点の中央値は カ . キ 点である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

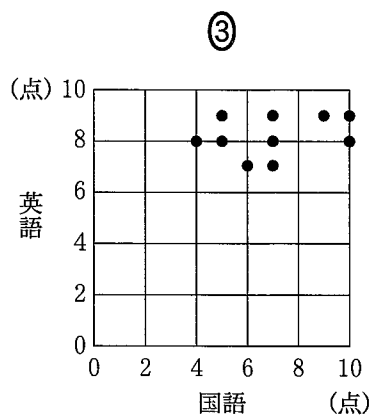
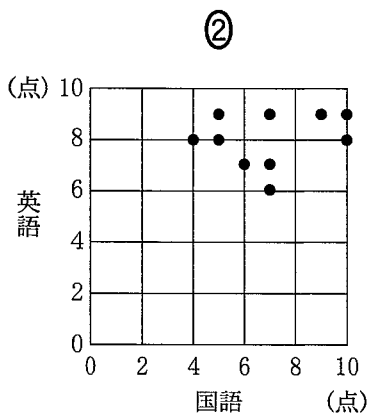
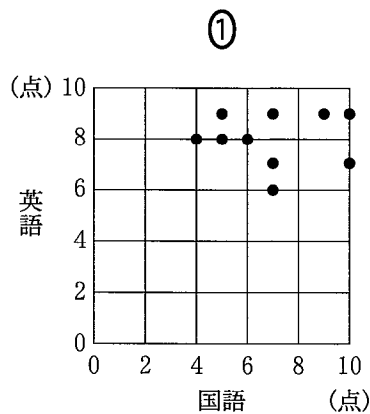
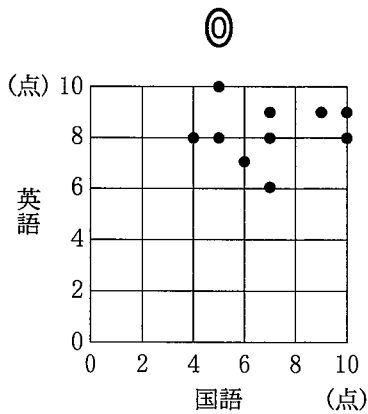
(2) 10人の英語の得点の平均値が8.0点、分散が1.00であることから、CとDの間には関係式

$$C + D = \boxed{\text{クケ}}$$

$$(C - 8)^2 + (D - 8)^2 = \boxed{\text{コ}}$$

が成り立つ。上の連立方程式と条件 $C > D$ により、C、Dの値は、それぞれ $\boxed{\text{サ}}$ 点、 $\boxed{\text{シ}}$ 点であることがわかる。

(3) 10人の国語と英語の得点の相関図(散布図)として適切なものは $\boxed{\text{ス}}$ であり、国語と英語の得点の相関係数の値は $\boxed{\text{セ}}$ 、 $\boxed{\text{ソタチ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{ス}}$ については、当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。



(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

- (4) 同じ10人に対して数学の小テスト(10点満点)を行ったところ、数学の得点の平均値はちょうど5.4点であり、分散はちょうど1.44であった。また、国語と数学の得点の相関係数はちょうど -0.125 であった。

ここで、 k を1から10までの自然数として、生徒 k の国語の得点を x_k 、数学の得点を y_k 、国語と数学の得点の合計 $x_k + y_k$ を w_k で表す。このとき、国語と数学の得点の合計 w_1, w_2, \dots, w_{10} の平均値は . 点である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

次に、国語と数学の得点の合計 w_1, w_2, \dots, w_{10} の分散を以下の手順で求めよう。国語の得点の平均値を \bar{x} 、分散を s_x^2 、数学の得点の平均値を \bar{y} 、分散を s_y^2 、国語と数学の得点の合計の平均値を \bar{w} 、分散を s_w^2 で表す。このとき

$$T = (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_{10} - \bar{x})(y_{10} - \bar{y})$$

とおくと、国語と数学の得点の相関係数は -0.125 であるから

$$T = \boxed{\text{ナニ}} \cdot \boxed{\text{ヌネノ}}$$

である。また、 k を 1 から 10 までの自然数として、 $(w_k - \bar{w})^2$ は

$$\begin{aligned} (w_k - \bar{w})^2 &= \{(x_k + y_k) - (\bar{x} + \bar{y})\}^2 \\ &= \{(x_k - \bar{x}) + (y_k - \bar{y})\}^2 \end{aligned}$$

と変形できる。これを利用して、分散 s_w^2 は

$$\begin{aligned} s_w^2 &= \frac{(w_1 - \bar{w})^2 + (w_2 - \bar{w})^2 + \dots + (w_{10} - \bar{w})^2}{10} \\ &= s_x^2 + s_y^2 + \boxed{\text{ハ}} T \end{aligned}$$

と表すことができるので、分散 s_w^2 の値は $\boxed{\text{ヒ}} \cdot \boxed{\text{フヘ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{ハ}}$ については、当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{5}$

③ $\frac{1}{10}$

④ $\frac{1}{20}$

第6問 (選択問題) (配点 20)

自然数 N を、0 または 1 または 2 のいずれかの値をとる a_0, a_1, \dots, a_{p-1} を用いて

$$N = a_{p-1} \times 3^{p-1} + a_{p-2} \times 3^{p-2} + \dots + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3 + a_0 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表すとき、数字の列 $a_{p-1}a_{p-2} \dots a_2a_1a_0$ を N の 3 進数表示とよび、 p をこの 3 進数表示の桁数とよぶ。ただし、 a_{p-1} は 0 ではないとする。たとえば

$$35 = 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$$

であるから、35 の 3 進数表示は 1022 であり、その桁数は 4 である。また、自然数 1 から 10 の 3 進数表示は以下のようなになる。

自然数 N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N の 3 進数表示	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101

3 進数表示が p 桁の自然数 N は $3^{p-1} \leq N < 3^p$ を満たすので、常用対数をとることにより、 p と N の関係式

$$p - 1 \leq \frac{\log_{10} N}{\log_{10} 3} < p \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。

- (1) 3 進数表示が 1212 である自然数は アイ である。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

(2) 自然数 N を与え, その 3 進数表示を求めよう。①の N を 3^{p-1} で割った商が a_{p-1} であることに着目して, N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_2a_1a_0$ を上の位の数から順に出力する〔プログラム 1〕を作成した。また, ①の N を 3 で割った余りが a_0 であることに着目して, N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_2a_1a_0$ を下の位の数から順に出力する〔プログラム 2〕を作成した。ただし, $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。また, $\text{LOG}_{10}(X)$ は X の常用対数を表す関数であり, ②により, いずれのプログラムにおいても, 110 行は入力された自然数 N または M の 3 進数表示の桁数を P に代入している。

〔プログラム 1〕

```
100 INPUT N
110 LET P=INT(LOG10(N)/LOG10(3))+1
120 LET X=3^(P-1)
130 FOR I=1 TO P
140 PRINT 
150 LET N=
160 LET X=
170 NEXT I
180 END
```

〔プログラム 2〕

```
100 INPUT M
110 LET P=INT(LOG10(M)/LOG10(3))+1
120 FOR I=1 TO P
130 PRINT M-INT(M/3)*3
140 LET M=INT(M/3)
150 NEXT I
160 END
```

, , に当てはまるものを, 次の①~⑧のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-------------------------|
| ① $X/3$ | ④ $N/3$ | ⑦ X/N |
| ② $\text{INT}(N/3)$ | ⑤ $N-\text{INT}(N/3)$ | ⑧ $N-\text{INT}(N/3)*3$ |
| ③ $\text{INT}(N/X)$ | ⑥ $N-\text{INT}(N/X)$ | ⑨ $N-\text{INT}(N/X)*X$ |

〔プログラム 2〕を実行して変数 M に 77 を入力すると, $\frac{\log_{10} 77}{\log_{10} 3} = 3.95 \dots$ であることから, 110 行では P に 4 が代入される。130 行で出力される値を並べることにより, 自然数 77 の 3 進数表示は となる。

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

- (3) 与えられた自然数 N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_2a_1a_0$ が、これを逆に並べた数字の列 $a_0a_1a_2\cdots a_{p-2}a_{p-1}$ と一致するかどうかを調べ、その結果を出力する〔プログラム 3〕を作成した。たとえば、〔プログラム 3〕を実行して変数 N に 202 を入力すると、202 は 3 進数表示が 21111 であるから「一致しない」と出力される。また、変数 N に 203 を入力すると、203 は 3 進数表示が 21112 であるから「一致する」と出力される。

〔プログラム 3〕

```
100 INPUT N
110 LET P=INT(LOG10(N)/LOG10(3))+1
120 LET X=3^(P-1)
130 
140 FOR I=1 TO INT(P/2)
150   LET A=
160   LET N=
170   LET X=
180   LET B=M-INT(M/3)*3
190   LET M=INT(M/3)
200   
210 NEXT I
220 PRINT "一致する"
230 GOTO 250
240 PRINT "一致しない"
250 END
```

(数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。)

〔プログラム3〕の に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| ① LET M=N | ② LET M=P | ③ LET M=X |
| ④ LET N=M | ⑤ LET N=P | ⑥ LET N=X |

に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| ① IF A=B THEN GOTO 220 | ④ IF A<>B THEN GOTO 220 |
| ② IF A=B THEN GOTO 240 | ⑤ IF A<>B THEN GOTO 240 |

〔プログラム3〕を実行して変数Nに436を入力すると、 $\frac{\log_{10} 436}{\log_{10} 3} = 5.53 \dots$ であることから、110行ではPに6が代入され、200行のIF文の判定は 回実行される。200行のIF文の判定が最後に行われたときのXの値は であり、その後、 。 に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 220行が実行され、240行は実行されない
- ② 240行が実行され、220行は実行されない
- ③ 220行と240行の両方が実行される
- ④ 220行と240行はいずれも実行されない