$\boxed{1}$

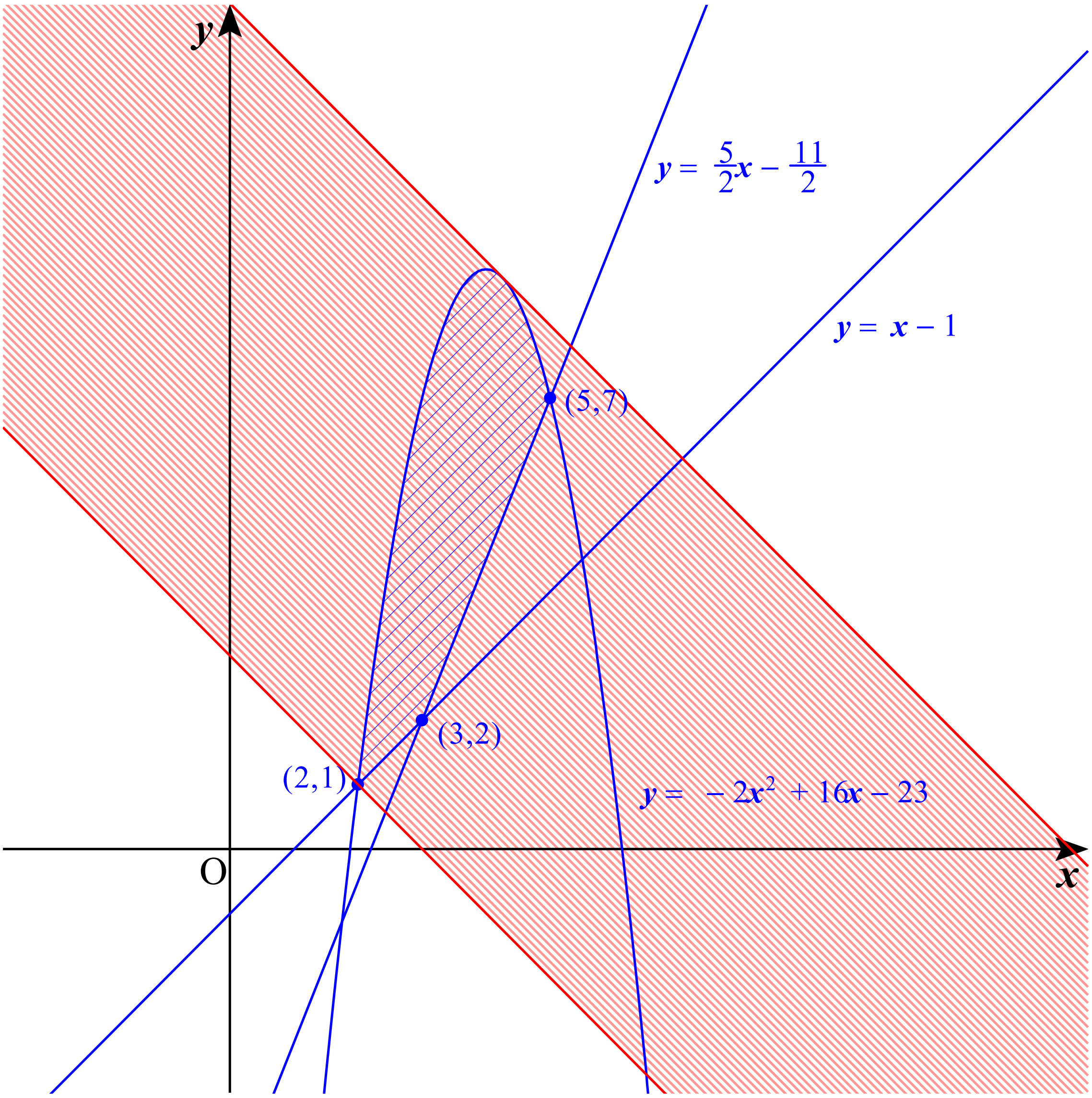
(1)

ア $\dfrac{105}{8}$ 　イ 3

解説

$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ より，k は直線の切片を表す。

図は，領域 D（青斜線部）とその領域内の $y=-x+k$ の軌跡（赤線）を表す。



図より，

k が最大となるのは，$y=-x+k$ と $y=-2x^2+16x-23$ が接するとき，

すなわち x の 2 次方程式 $-x+k=-2x^2+16x-23$ が重解をもつときである。

これを変形すると，$2x^2-17x+23-k=0$

判別式＝0 より，

$17^2-4\times2\times(23-k)=0$

$23-k=\dfrac{289}{8}$

$k=\dfrac{105}{8}$ ・・・ $\boxed{ア}$

k が最小となるのは，点(2,1)を通るときで，

$1=-2+k$ より，$k=3$ ・・・ $\boxed{イ}$

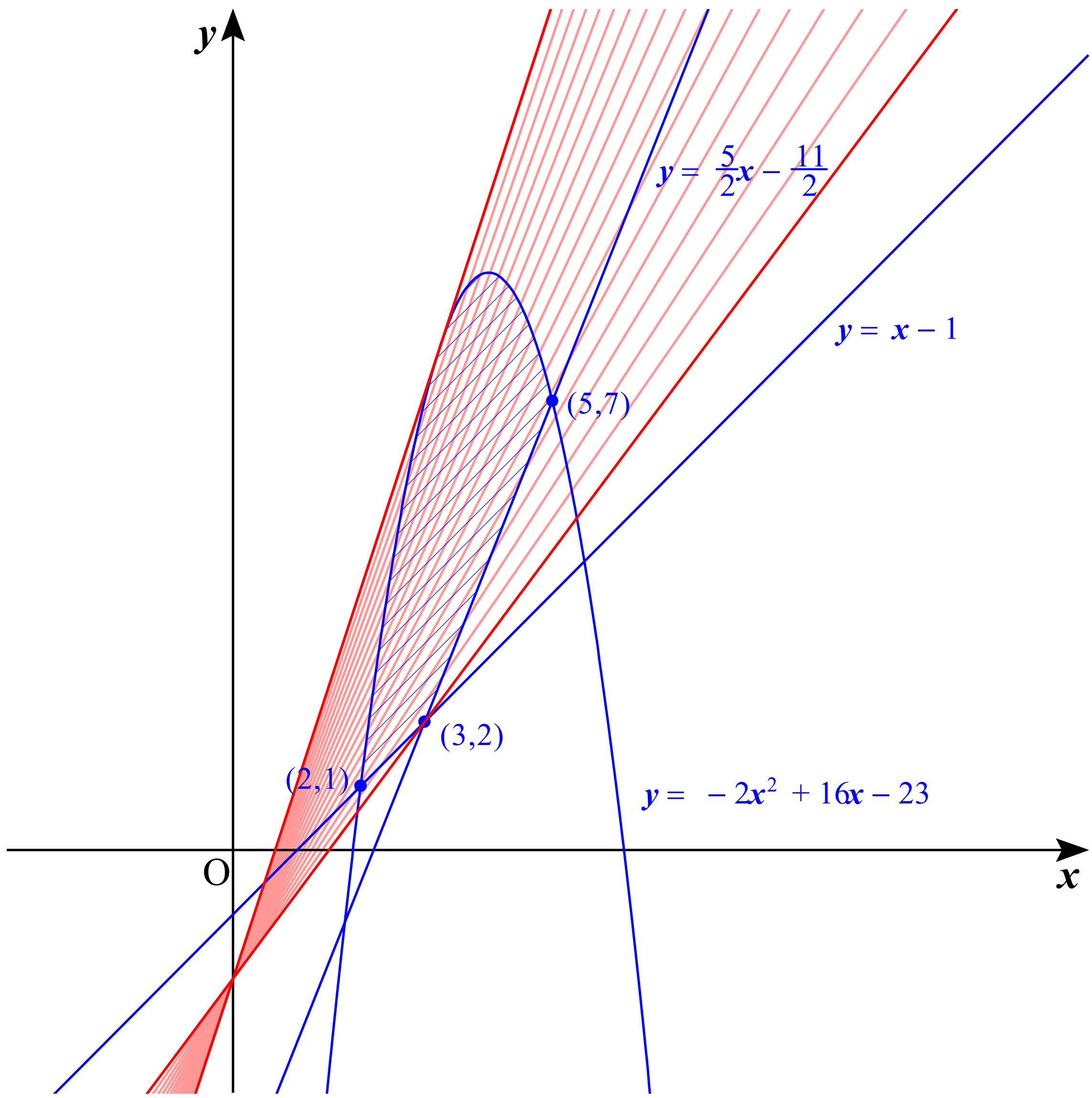
(2)

$\boxed{\text{ウ}}\,16-2\sqrt{42}$　$\boxed{\text{エ}}\,\frac{4}{3}$

解説

$\frac{y+2}{x}=m$ とおくと，$y=mx-2$ より，m は直線の傾きを表す。

図は，領域 D（青斜線部）とその領域内の $y=mx-2$ の軌跡（赤線）を表す。



図より，
m が最大となるのは,
$y=mx-2$ と $y=-2x^2+16x-23$ が接するとき，
すなわち x の 2 次方程式 $mx-2=-2x^2+16x-23$ が重解をもつときである。
これを変形すると，$2x^2+(m-16)x+21=0$
判別式＝0 より，
$(m-16)^2-4\times 2\times 21=0$
$(m-16)^2=4\times 42$
$m-16=\pm 2\sqrt{42}$
$m=16\pm 2\sqrt{42}$ ・・・①
重解を α とおくと，解と係数の関係より，

$$\alpha=\frac{\alpha+\alpha}{2}=\frac{\frac{-(m-16)}{2}}{2}=\frac{16-m}{4}$$

$2\le\alpha\le 5$ より，

$$2\le\frac{16-m}{4}\le 5$$

$-4\le m\le 8$ ・・・②
①かつ②より，
$m=16-2\sqrt{42}$ ・・・$\boxed{ウ}$
補足
$m=16-2\sqrt{42}$ であるのは，図から明らかである。
m が最小となるのは,
$y=mx-2$ が点(3,2)を通るときで,
$2=3m-2$ より，

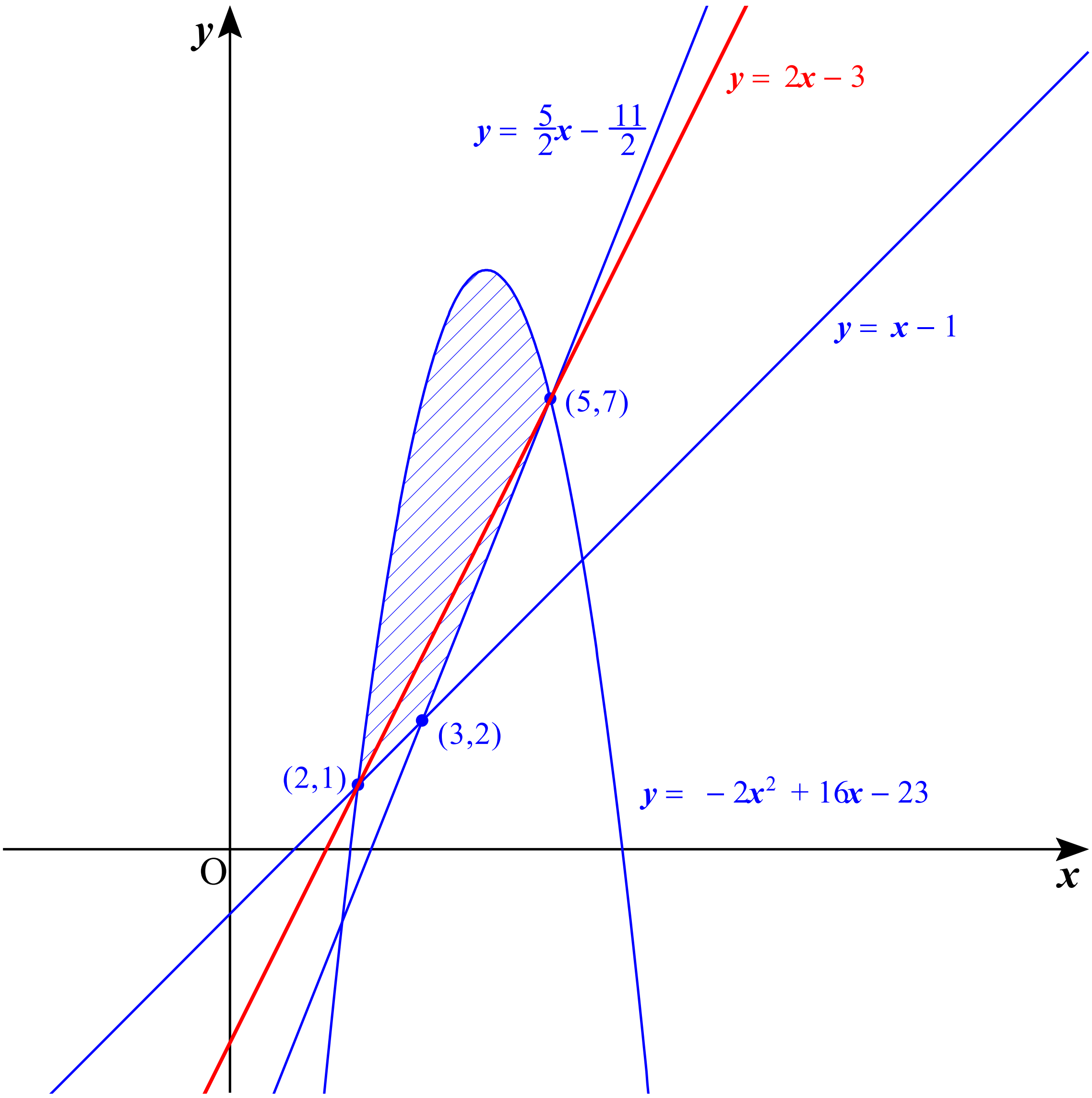
$m=\frac{4}{3}$ ・・・$\boxed{エ}$

(3)

$\boxed{\text{オ}}\ \dfrac{21}{2}$

解説

領域 D を 2 点(2,1)，(5,7)を通る直線 $y=2x-3$ で分割する。



$y \geq 2x-3$ の部分の面積

$$\int_2^5 \left\{\left(-2x^2+16x-23\right)-\left(2x-3\right)\right\}dx = -2\int_2^5 (x-5)(x-2)dx$$
$$= -2\int_2^5 \{(x-2)-3\}(x-2)dx$$
$$= -2\int_2^5 \left\{(x-2)^2-3(x-2)\right\}dx$$
$$= -2\left[\frac{(x-2)^3}{3}-\frac{3(x-2)^2}{2}\right]_2^5$$
$$= -2\left(9-\frac{27}{2}\right)$$
$$= 9$$

補足

$\frac{1}{6}$ 公式より，$\int_2^5 \left\{\left(-2x^2+16x-23\right)-\left(2x-3\right)\right\}dx = \frac{2(5-2)^3}{6} = 9$ でよい。

$y \leq 2x-3$ の部分の面積

A(2,1)，B(3,2)，C(5,7)とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ より，$\Delta\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left|1\cdot 6-1\cdot 3\right| = \frac{3}{2}$

補足

三角形の面積公式

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ とすると，$\Delta\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left|ad-bc\right|$

を使った。

$$\Delta\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin A$$
$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\cos^2 A}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{90-81}$$
$$= \frac{3}{2}$$

でもよいが，面倒。

以上より，

領域 D の面積＝$9+\frac{3}{22}=21$

$\boxed{2}$

(1)

$$a_n=\frac{1}{\frac{\log_q q}{\log_q p^n}}=\log_q p^n=n\log_q p$$

$$\therefore a_{n+1}-a_n=(n+1)\log_q p-n\log_q p$$

$$=\log_q p \quad \cdots (答)$$

(2)

S_n は，初項 $a_1=\log_q p$，末項 $n\log_q p$，項数 n の等差数列の和だから，

$$S_n=n\times\frac{\log_q p+n\log_q p}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\log_q p \quad \cdots (答)$$

(3)

$$\begin{aligned}b_n&=q^{a_n}\\&=q^{n\log_q p}\\&=q^{\log_q p^n}\\&=p^n\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{p^{n+1}}{p^n}=p \quad \cdots (答)$$

補足

$f(x)=a^x$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\log_a x$ だから，

$f\circ f^{-1}(x)=x$ かつ $f\circ f^{-1}(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=a^{f^{-1}(x)}=a^{\log_a x}$

よって，

$x=a^{\log_a x}$

あるいは，　$x=a^y \Leftrightarrow y=\log_a x$ より，$x=a^y=a^{\log_a x}$

(4)

$$\begin{aligned}T_n&=b_1b_2b_3\cdots b_n\\&=p^1p^2p^3\cdots p^n\\&=p^{1+2+3+\cdots+n}\\&=p^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \cdots (答)\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

(1)

ΔABC の内角の和より,

$C=\pi-(A+B)$

$$\begin{aligned}\sin C&=\sin\{\pi-(A+B)\}\\&=\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\\&=\sin A\cos B+\sin B\cos A\end{aligned}$$

これと $\sin C=2\sin A\cos B$ より,

$2\sin A\cos B=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$

$\sin(A-B)=0$

また, $0<A<\pi$, $0<B<\pi$ より,

$0<A<\pi$, $-\pi<-B<0$

$0+(-\pi)<A+(-B)<\pi+0$

$-\pi<A-B<\pi$

よって, $A-B=0$

ゆえに,

$B=A$ ・・・(答)

$C=\pi-2A$ ・・・(答)

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned}F&=\cos A+\cos A+\cos(\pi-2A)\\&=2\cos A-\cos 2A\\&=2\cos A-\left(-1+2\cos^2 A\right)\\&=-2\cos^2 A+2\cos A+1\\&=-2\left(\cos A-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

ここで,

$C=\pi-2A$, $C>0$, $A>0$ より,

$\pi-2A>0$, $A>0$

$\therefore 0<A<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore 0<\cos A<1$

$\therefore 1<F\leq\dfrac{3}{2}$ ・・・(答)

(3)

(1)より，

$$G=\cos^2 A\cos(\pi-2A)$$
$$=\cos^2 A\cdot -\cos 2A$$
$$=-\cos^2 A(-1+2\cos^2 A)$$
$$=-2\cos^4 A+\cos^2 A$$
$$=-2\left(\cos^2 A-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

ここで， $0<\cos A<1$ より， $0<\cos^2 A<1$

よって，

$-1<G\leq\dfrac{1}{8}$　・・・(答)

$G=-\cos^2 A(-1+2\cos^2 A)$より，

$G=0$ のとき，

$\cos A=0$ または $\cos A=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これと， $0<\cos A<1$ より，

$\cos A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0<A<\dfrac{\pi}{2}$ より， $A=\dfrac{\pi}{4}$

よって，

$A=B=\dfrac{\pi}{4}$， $C=\pi-2A=\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに，

ΔABC は， $C=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。　・・・(答)