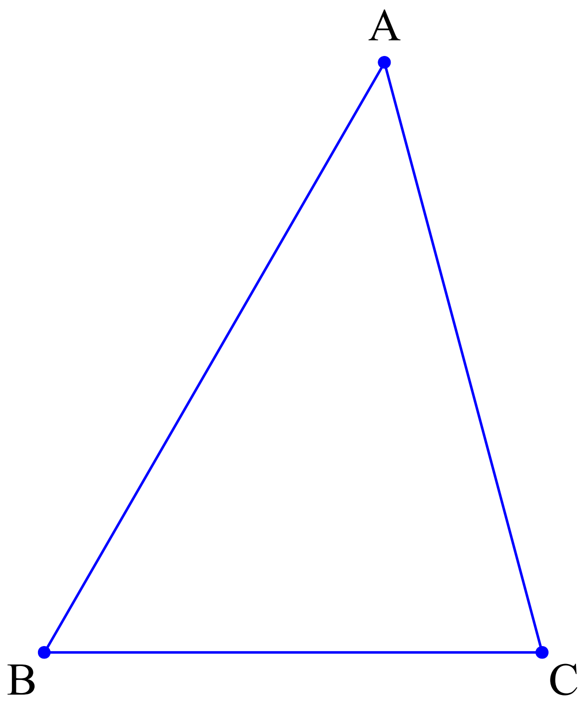
$\boxed{1}$

(1)

$\boxed{ア}\frac{\pi}{4}$　$\boxed{イ}\frac{\pi}{3}$　$\boxed{ウ}2$

解説



$\mathrm{AB}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)k$， $\mathrm{BC}=2\sqrt{2}k$， $\mathrm{CA}=2\sqrt{3}k$ とおくと，

$$\cos A=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}$$
$$=\frac{k^2\left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right\}}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot 2\sqrt{3}k^2}$$
$$=\frac{12+4\sqrt{3}}{4\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0<\angle A<\pi$ より，

$\angle A=\frac{\pi}{4}$ ・・・$\boxed{ア}$

$$\cos B=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{k^2\left\{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2\right\}}{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot 2\sqrt{2}k^2}$$
$$=\frac{4+4\sqrt{3}}{8+8\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$0<\angle B<\pi$ より，

$\angle B=\frac{\pi}{3}$ ・・・$\boxed{イ}$

正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2\sqrt{2}$$

$\mathrm{BC}=2\sqrt{2}\sin A=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2$ ・・・$\boxed{ウ}$

別解

$\boxed{イ}$

正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin B}$$

$$\frac{2\sqrt{2}k}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{3}k}{\sin B}$$

$$\therefore \sin B=\frac{2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで，

最も長い辺は辺 AB であり，

$\mathrm{AB}^2=\left(8+4\sqrt{3}\right)k^2$， $\mathrm{BC}^2=8k^2$， $\mathrm{CA}^2=12k^2$ より，

$\mathrm{AB}^2-\left(\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\right)=4k^2\left(\sqrt{3}-3\right)<0$

$\therefore \mathrm{AB}^2<\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$

よって， $\Delta\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形である。

したがって，

$$0<\angle B<\frac{\pi}{2}$$

よって，

$$\angle B=\frac{\pi}{3}$$

(2)

$\boxed{エ}\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

解説

$\mathrm{BC}=2\sqrt{2}k=2$ より， $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，

$\mathrm{AB}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)k=1+\sqrt{3}$

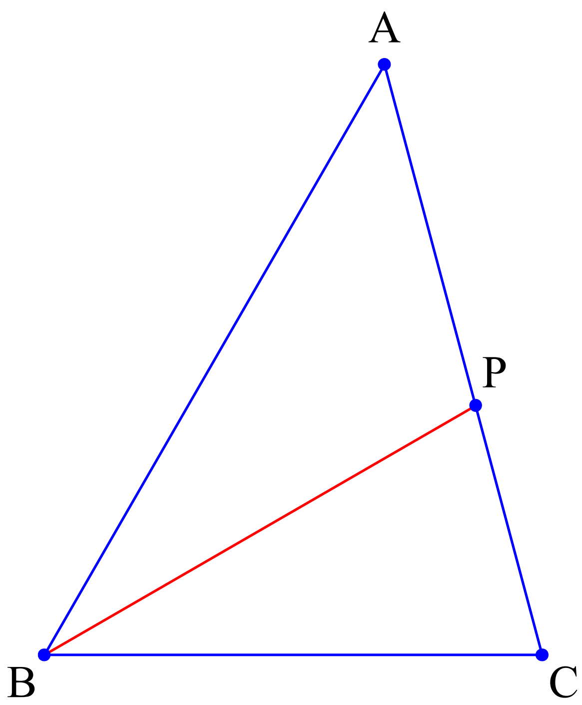
ゆえに，

$$\Delta\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

(3)

$\boxed{\text{オ}}$2

解説



BP は∠B の 2 等分線だから，

BC：BA＝CP：PA

$2\sqrt{2}$ ： $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ＝CP：PA

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}\times \mathrm{CA} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}\times 2\sqrt{3}k \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{6+2\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\left(6+2\sqrt{3}\right)}{6+2\sqrt{3}} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\mathrm{BP}}{\sin A}$$

$$\mathrm{BP} = \frac{\mathrm{AP}\sin A}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = 2$$

別解

$$\angle APB = 180° - \left(\angle A + \frac{\angle B}{2}\right) = 180° - (45° + 30°) = 105° = 45° + 60° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

正弦定理より，

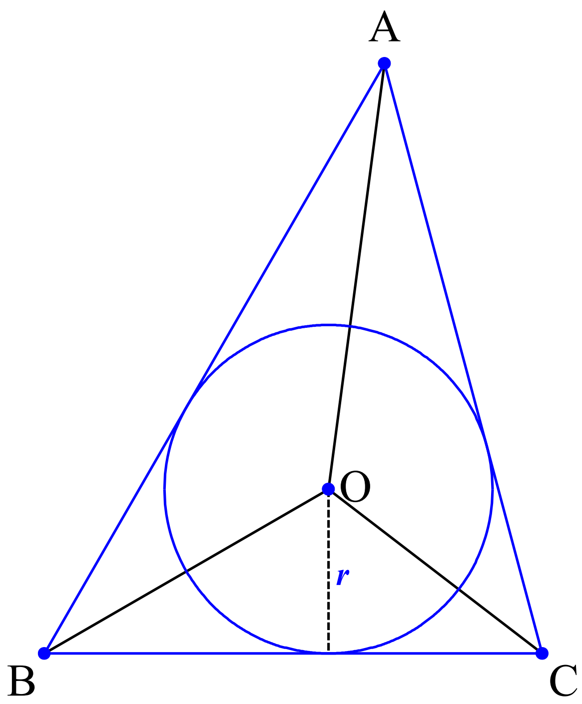
$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin \angle APB} = \frac{\mathrm{BP}}{\sin A}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{BP} &= \frac{\mathrm{AB}\sin A}{\sin \angle APB} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

(4)

$\boxed{\text{カ}}\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

解説



$$\Delta\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot r+\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot r+\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot r$$
$$=\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$$
$$=\frac{r}{2}\left\{\left(1+\sqrt{3}\right)+2+\sqrt{6}\right\}$$
$$=\frac{r}{2}\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$$

$\boxed{エ}$より $\Delta\mathrm{ABC}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ だから，

$$\frac{r}{2}\left(3+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$
$$r=\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$$

⇦ 分母・分子を $\sqrt{3}$ で割り，根号内の数字を簡単にし，計算処理を楽にする。

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{2}\right)}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{\left(4+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{2\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-6+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-4}$$
$$=\frac{-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{-4}$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{2}$

(1)

C_2 が点 P（7,20）を通ることより，

$20 = 49a + 7b - 134$

$\therefore 7a + b = 22$　・・・①

C_1 ： $y = f(x) = x^2 - 6x + 13$

C_2 ： $y = g(x) = ax^2 + bx - 134$

とおくと，

$f'(x) = 2x - 6$

$g'(x) = 2ax + b$

点 P（7,20）における C_1， C_2 の接線の傾きが等しいから，

$g'(7) = f'(7)$

$\therefore 14a + b = 8$　・・・②

①，②より，

$a = -2$， $b = 36$　・・・（答）

別解

C_1， C_2 の共有点は点 P（7,20）だから，

x についての 2 次方程式 $ax^2 + bx - 134 = x^2 - 6x + 13$

すなわち $(a-1)x^2 + (b+6)x - 147 = 0$ は $x = 7$ を重解にもつ。

解と係数の関係より，

$-\dfrac{b+6}{a-1} = 7 + 7$　・・・①

$-\dfrac{147}{a-1} = 7 \times 7$　・・・②

②より，

$a - 1 = -3$

$\therefore a = -2$

これと③より，

$-\dfrac{b+6}{-2-1} = 14$

$\therefore b = 36$

(2)

C_1 ： $y=f(x)=x^2-6x+13$ とその接線 L_1 との接点 Q の x 座標を x_1 とすると，

$f'(x_1)=2$ より，

$2x_1-6=2$

$\therefore x_1=4$

よって，Q$(4,5)$

ゆえに，接線 L_1 の式は，

$y=2(x-4)+5$ より，

$2x-y-3=0$　・・・③

C_2 ： $y=g(x)=-2x^2+36x-134$ とその接線 L_2 との接点 R の x 座標を x_2 とすると，

$g'(x_2)=2$ より，

$-4x_2+36=2$

$\therefore x_2=\dfrac{17}{2}$

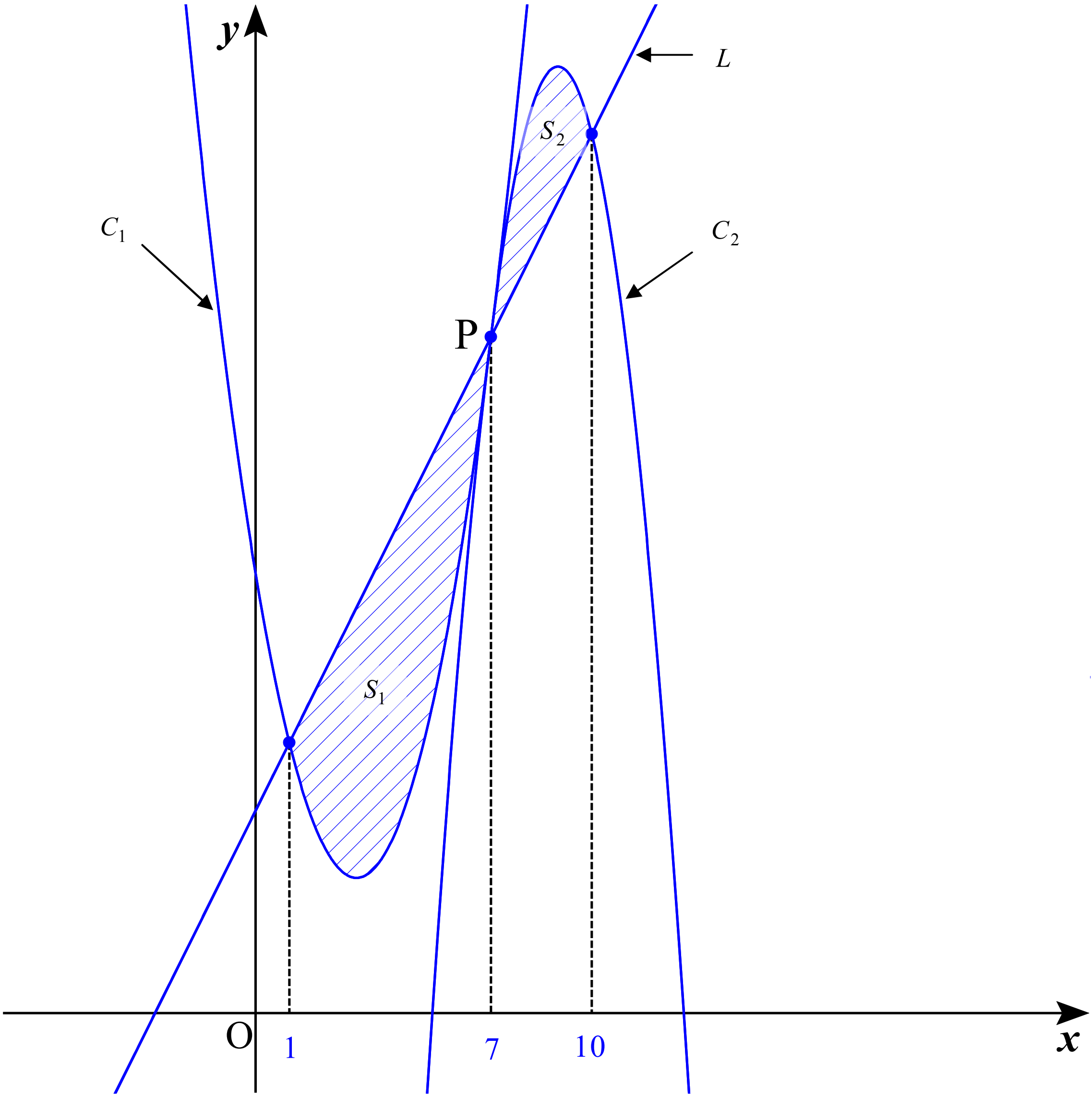
$$\begin{aligned} g\left(\frac{17}{2}\right)&=-2\times\left(\frac{17}{2}\right)^2+36\times\frac{17}{2}-134 \\ &=\frac{-17^2+36\times17-2\times134}{2} \\ &=\frac{17(-17+36)-268}{2} \\ &=\frac{323-268}{2} \\ &=\frac{55}{2} \end{aligned}$$

よって，R$\left(\dfrac{17}{2},\dfrac{55}{2}\right)$　・・・④

2 直線 L_1 と L_2 の距離を d とすると，d は L_2 上の点 R と直線 L_1 の距離と等しいから，

$$d=\frac{\left|2\times\frac{17}{2}-\frac{55}{2}-3\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{27}{2\sqrt{5}}=\frac{27\sqrt{5}}{10}$$　・・・(答)

(3)



直線 L は C_1, C_2 の共有点 P (7,20) を通るから,

直線 L と C_1 の共有点, 直線 L と C_2 の共有点の x 座標の 1 つはいずれも 7 である。

直線 L と C_1 の共有点の x 座標のうち, $x=7$ でないほうを s とおくと,

s と 7 は, x についての 2 次方程式 $x^2-6x+13=2x+6$,

すなわち $x^2-8x+7=0$ の解だから,

解と係数の関係より,

$s+7=8$

$\therefore s=1$

よって,

$$S_1=\int_1^7\left\{2x+6-\left(x^2-6x+13\right)\right\}dx$$
$$=-\int_1^7(x-7)(x-1)dx$$
$$=\frac{(7-1)^3}{6}$$
$$=36$$

同様に，

直線 L と C_2 の共有点の x 座標のうち， $x=7$ でないほうを t とおくと，

t と 7 は， x についての 2 次方程式 $-2x^2+36x-134=2x+6$,

すなわち $2x^2-34x+140=0$ の解だから，

解と係数の関係より，

$t+7=17$

$\therefore t=10$

よって，

$$S_2=\int_7^{10}\left\{-2x^2+36x-134-(2x+6)\right\}dx$$
$$=-2\int_7^{10}(x-10)(x-7)dx$$
$$=2\times\frac{(10-7)^3}{6}$$
$$=9$$

ゆえに，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{36}{9}=4$$

3

(1)

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}\quad\cdots(答)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\quad\cdots(答)$$

(2)

条件より，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}=x-4y+3z=0$$

$\therefore x-4y=-3z \quad\cdots①$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=2x-3y+z=0$$

$\therefore 2x-3y=-z \quad\cdots②$

①，②より

$x=z$，　$y=z$

よって，

$x=y=z$

これと，$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=x^2+y^2+z^2=1$ より，

$x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　（$\because x>0$）　$\cdots$(答)

(3)

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+s+2t\\5-4s-3t\\1+3s+t\end{pmatrix}\quad\cdots③$$

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OD}+u\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+\frac{u}{\sqrt{3}}\\6+\frac{u}{\sqrt{3}}\\4+\frac{u}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\quad\cdots④$$

③＝④より，

$$1+s+2t=4+\frac{u}{\sqrt{3}},\quad 5-4s-3t=6+\frac{u}{\sqrt{3}},\quad 1+3s+t=4+\frac{u}{\sqrt{3}}$$

整理して，

$$s+2t-\frac{u}{\sqrt{3}}=3 \quad ・・・⑤$$

$$4s+3t+\frac{u}{\sqrt{3}}=-1 \quad ・・・⑥$$

$$3s+t-\frac{u}{\sqrt{3}}=3 \quad ・・・⑦$$

⑤より，

$$\frac{u}{\sqrt{3}}=s+2t-3 \quad ・・・⑧$$

これを⑥，⑦に代入して，

$$4s+3t+(s+2t-3)=-1$$

$$3s+t-(s+2t-3)=3$$

整理して，

$$5s+5t=2$$

$$2s-t=0$$

これを解くと，$s=\frac{2}{15}$，$t=\frac{4}{15}$

よって，⑧より，$u=\sqrt{3}\left(\frac{2}{15}+\frac{8}{15}-3\right)=-\frac{7\sqrt{3}}{3}$

以上より，

$$s=\frac{2}{15},\quad t=\frac{4}{15},\quad u=-\frac{7\sqrt{3}}{3} \quad ・・・(答)$$

(4)

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}4+\frac{u}{\sqrt{3}}\\ 6+\frac{u}{\sqrt{3}}\\ 4+\frac{u}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\frac{7}{3}\\ 6-\frac{7}{3}\\ 4-\frac{7}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{11}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

よって，

$$\mathrm{H}\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{5}{3}\right) \quad ・・・(答)$$