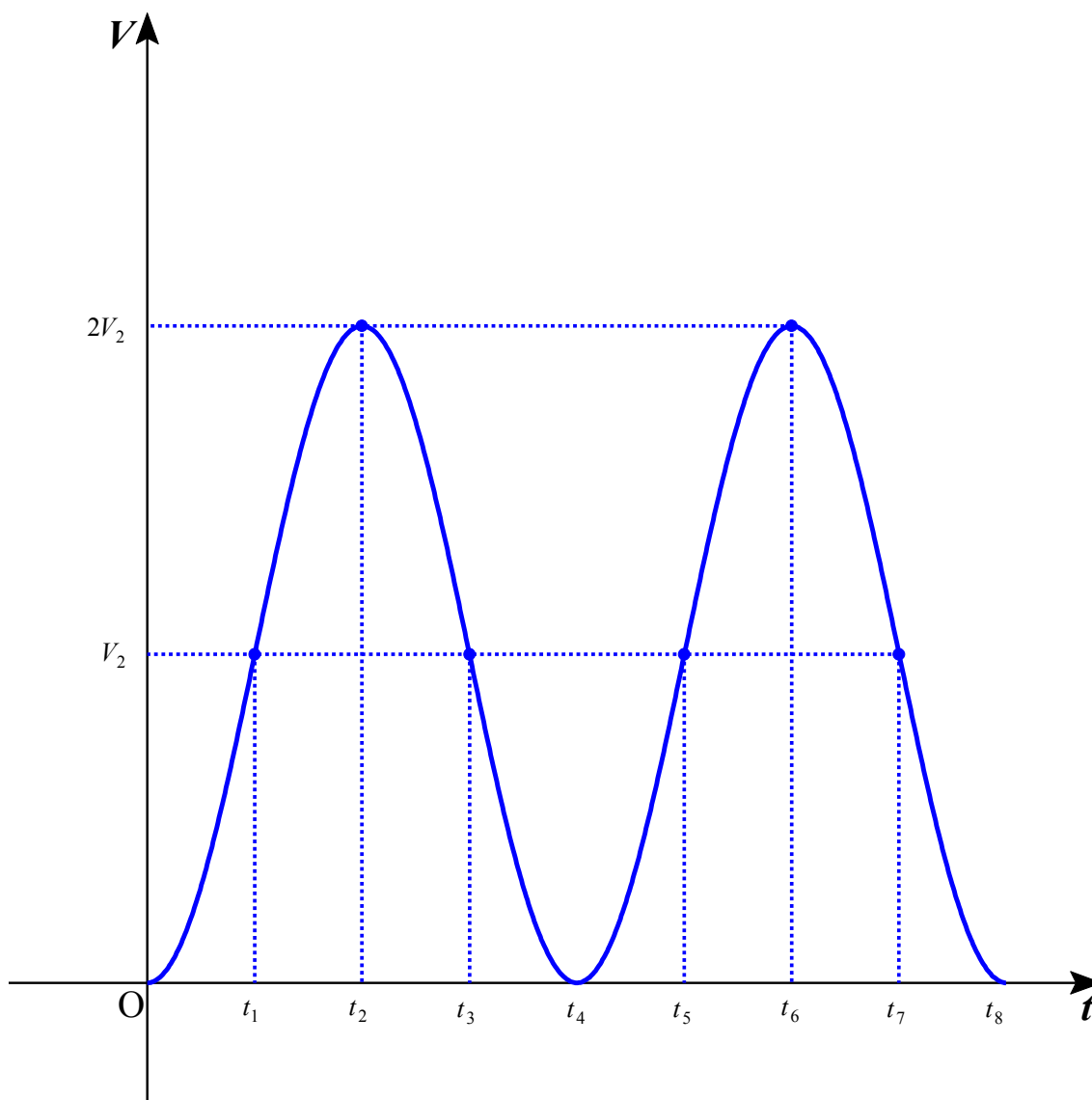


1.

$$\boxed{\text{ア}} \quad 1 - \frac{v_0^2}{2gR} \quad \boxed{\text{イ}} \quad \sqrt{2gR} \quad \boxed{\text{ウ}} \quad -mg \sin \theta \quad \boxed{\text{エ}} \quad -\frac{mg}{R} s \quad \boxed{\text{オ}} \quad \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \boxed{\text{カ}} \quad \frac{m}{m+M} v_0$$

$$\boxed{\text{キ}} \quad 1 - \frac{Mv_0^2}{2gR(m+M)} \quad \boxed{\text{ク}} \quad \sqrt{\frac{2gR(m+M)}{M}} \quad \boxed{\text{ケ}} \quad -v_0$$

$$\boxed{\text{コ}}$$


t_1 : $\theta > 0$ における小球の最高点到達時刻, t_2 : 小球が A 点を負方向に通過する時刻
 t_3 : $\theta < 0$ における小球の最高点到達時刻, t_4 : 小球が A 点を正方向に通過する時刻
 t_5 : $\theta > 0$ における小球の最高点到達時刻, t_6 : 小球が A 点を負方向に通過する時刻
 t_7 : $\theta < 0$ における小球の最高点到達時刻, t_8 : 小球が A 点を正方向に通過する時刻

解説

ア

小球の力学的エネルギーが保存されるから、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR - mgR \cos \theta_1 \quad \therefore \cos \theta_1 = 1 - \frac{v_0^2}{2gR}$$

イ

$$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 \leq \cos \theta_1 = 1 - \frac{v_0^2}{2gR} \leq 1 \quad \therefore 0 \leq \frac{v_0^2}{2gR} \leq 1$$

$$\text{ゆえに, } v_0 \leq \sqrt{2gR}$$

ウ

F は mg の接線方向の成分だから、 $F = -mg \sin \theta$

エ

$$F = -mg\theta, \quad \theta = \frac{s}{R} \text{ より, } F = -\frac{mg}{R}s$$

オ

$$F = -\frac{mg}{R}s \text{ より, 単振動の周期 } \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{R}}} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

カ

小球と台から成る運動系に作用する水平方向の外力は 0 だから、
水平方向の運動量が保存される。

小球と台の相対速度が 0 になるとき小球が台に対して静止するから、
したがって、このとき小球と台は一体となる。

$$\text{よって, } mv_0 = (m+M)V_2 \quad \therefore V_2 = \frac{m}{m+M}v_0$$

キ

小球と台の力学的エネルギーが保存されるから、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V_2^2 + mgR - mgR \cos \theta_2$$

$$\text{これと } V_2 = \frac{m}{m+M}v_0 \text{ より, } \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 + mgR - mgR \cos \theta_2$$

$$\therefore \cos \theta_2 = 1 - \frac{Mv_0^2}{2gR(m+M)}$$

ク

$$0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 \leq \cos \theta_2 = 1 - \frac{Mv_0^2}{2gR(m+M)} \leq 1 \quad \therefore \frac{Mv_0^2}{2gR(m+M)} \leq 1$$

$$\text{よって, } v_0 \leq \sqrt{\frac{2gR(m+M)}{M}}$$

ケ

解法 1

力学的エネルギーが保存されるから、
小球と台が A 点で弾性衝突したのと同じである。

$$\text{よって, } \frac{v_3}{v_0 - 0} = -1 \quad \therefore v_3 = -v_0$$

解法 2

小球が A 点を通る瞬間における小球の速度を v_m 、台の速度を v_M とすると、
運動量保存則より、 $mv_0 = mv_m + Mv_M$

$$\text{力学的エネルギー保存則より, } \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2$$

$$\text{これを解くと, } v_m = \frac{m-M}{m+M}v_0, \quad v_M = \frac{2m}{m+M}v_0 \quad \therefore v_3 = v_m - v_M = -v_0$$

コ

小球が A 点を負方向に通る瞬間

$$\begin{cases} v_m - v_M = -v_0 \\ mv_0 = mv_m + Mv_M \end{cases} \text{ より, } v_M = \frac{2m}{m+M}v_0 = 2V_2$$

小球が A 点を正方向に通る瞬間

$$\begin{cases} v_m - v_M = v_0 \\ mv_0 = mv_m + Mv_M \end{cases} \text{ より, } v_M = 0$$

台が小球から受ける垂直抗力を N とするとその水平成分は $N \sin \theta$

したがって、 $\theta > 0$ のとき台は正の方向に、 $\theta < 0$ のとき負の方向に加速される。

よって、台の速度は小球が A 点を

負方向に通る瞬間に最大値 $2V_2$ を、正方向に通る瞬間に最小値 0 をとる。

また、台と小球が一体となる時、すなわち小球が最高点に達したときの速度は

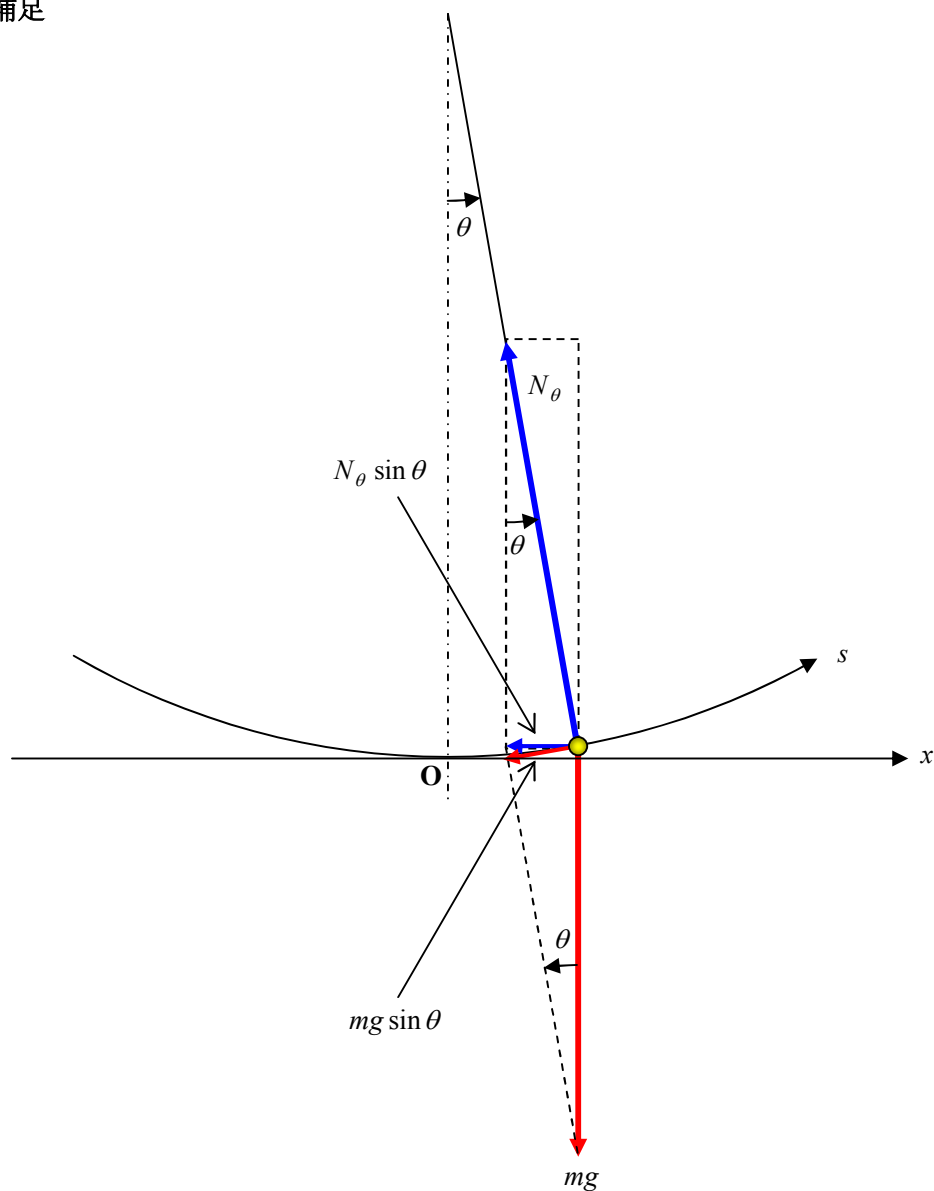
$$\text{カの解説より, } \theta \text{ の正負によらず } \frac{m}{m+M}v_0 = V_2 \text{ となる。}$$

尚、小球と台からなる運動系の運動については、

小球が台に対して単振動運動しながら、

運動系の質量中心（重心）が水平方向に速度 $\frac{m}{m+M}v_0$ で移動する。

補足



θ_2 が十分小さい場合の小球の円弧に沿った運動と水平方向の運動について

小球と円弧の接点における接線と水平方向のなす角は $|\theta|$ である。

これと $-\theta_2 \leq \theta \leq \theta_2$ より, A を原点とし, 水平右向に x 軸をとると, $\theta = \frac{s}{R} \approx \frac{x}{R}$. . . ①

同様に, $-\theta_2 \leq \theta \leq \theta_2$ より $\sin \theta \approx \theta$. . . ②

また, 小球が受ける垂直抗力の大きさ N_θ , 重力の大きさ mg とすると,

N_θ と mg のなす角が 180° に近似できるので, $N_\theta \approx mg$. . . ③

小球の水平方向の加速度を α とすると、

その運動方程式は $m\alpha = -N_\theta \sin \theta$

小球の円弧の接線方向の加速度を β とすると、

その運動方程式は $m\beta = -mg \sin \theta$

これと①, ②, ③より, $\alpha = \beta = -\frac{g}{R}x \quad \therefore m\alpha = -\frac{mg}{R}x, \quad m\beta = -\frac{mg}{R}x$

よって, θ_2 が十分小さい場合

小球の円弧に沿った運動と水平方向の運動は同じ運動であるとしてよい。

要するに, 小球は水平方向に運動していると見なしてよい。 . . . ④

台上の静止観測者が見た小球の水平方向の運動および床に対する台と小球の速度

一方, 台が受ける水平方向の加速度を γ とすると, その運動方程式は $M\gamma = N_\theta \sin \theta$

これと①, ②, ③より, $\gamma = -\frac{mg}{RM}x$

よって, 台で静止している観測者が見た小球の水平方向の運動方程式は

$$m(\beta - \gamma) = -m \cdot \left(\frac{g}{R} + \frac{mg}{RM} \right) x \quad \therefore m(\beta - \gamma) = -\frac{m(M+m)g}{RM}x$$

これは台で静止している観測者が小球を見ると、

角振動数 $\sqrt{\frac{m(M+m)g}{RM}}$ すなわち $\sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}}$ で単振動運動を行うことを示している。

また, $t=0$ のとき小球は振動中心 $x=0$ にあるから, 初期位相は 0 である。

よって, 振幅を A とおくと, 小球の振動中心からの変位は

$$x = A \sin \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}} t$$

これより, 台で静止している観測者が見た小球の水平方向の速度は

$$\frac{dx}{dt} = A \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}} \cos \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}} t$$

ここで, 小球の速度を v_m , 台の速度を v_M とすると、

$$\frac{dx}{dt} = v_m - v_M \text{ より, } v_m - v_M = A \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}} \cos \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}} t$$

また, $t=0$ のとき $v_m - v_M = v_0$ だから, $v_0 = A \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}}$

よって, $v_m - v_M = v_0 \cos \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}} t \quad \dots \textcircled{5}$

尚, 振幅 $A = v_0 \sqrt{\frac{RM}{(M+m)g}}$

④より、小球と台の運動量の和が保存されるとしてよいから、

$$mv_0 = mv_m + Mv_M \quad \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥の連立方程式を解くことにより、

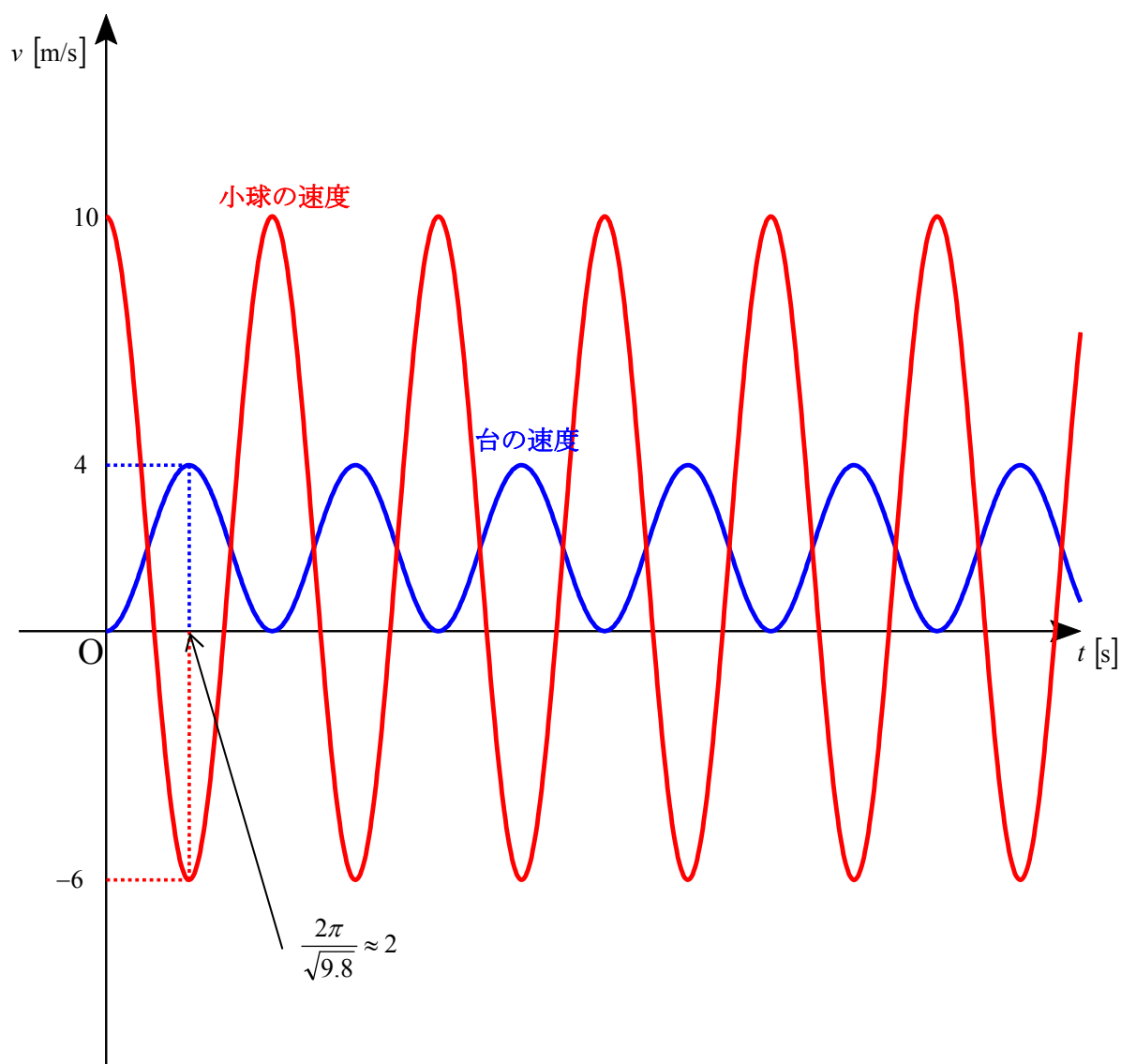
$$v_M = \frac{mv_0}{M+m} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}} t \right)$$

$$v_m = \frac{v_0}{M+m} \left(m + M \cos \sqrt{\frac{(M+m)g}{RM}} t \right)$$

下図

小球の質量 $m = 1 \text{ kg}$, 台の質量 $M = 4 \text{ kg}$, 小球の初速度 $v_0 = 10 \text{ m/s}$,

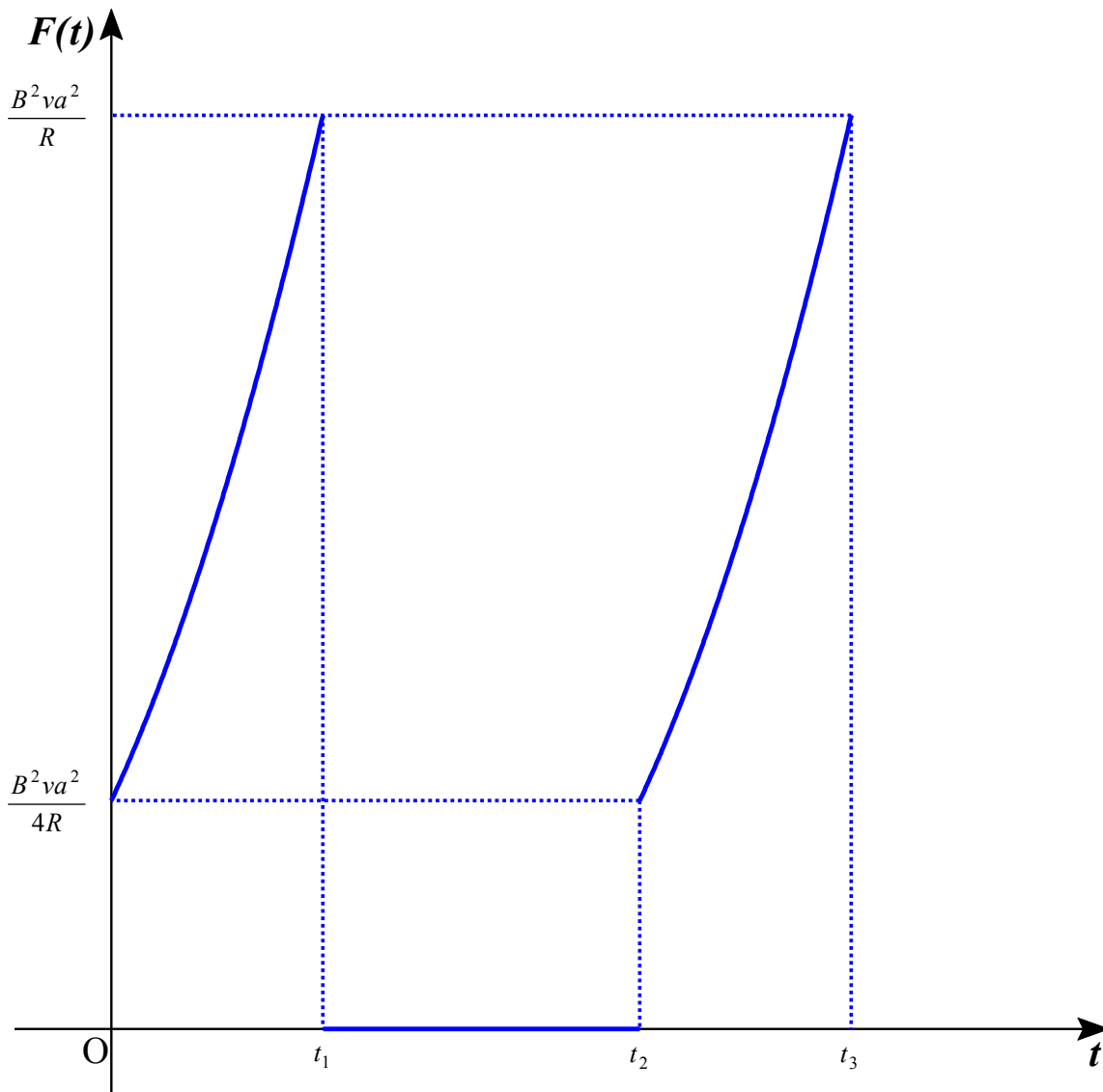
円弧の軌道半径 $R = 5 \text{ m}$



2.

$\frac{v^2}{\sqrt{3}}t^2 + avt$
 $\left(\frac{2v^2}{\sqrt{3}}t + av\right)\Delta t + \frac{v^2}{\sqrt{3}}(\Delta t)^2$
 $-Bv\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a\right)$
 $-\frac{Bv}{4R}\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a\right)$

$\frac{(Bv)^2}{4R}\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a\right)^2$
 $\frac{B^2v}{4R}\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a\right)^2$
 $\frac{(Bv)^2}{4R}\left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a\right)^2$

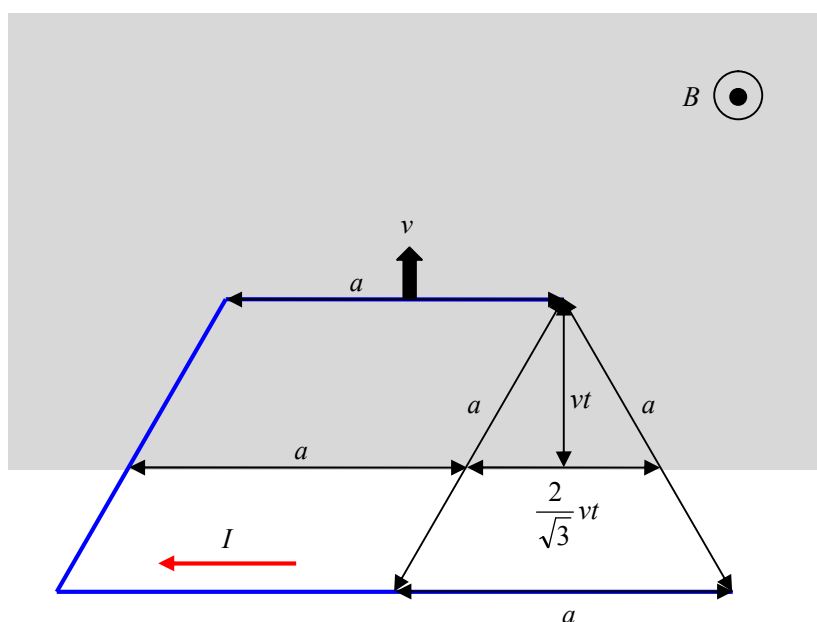


解説

ア

与えられた閉回路は1辺の長さが a のひし形と1辺の長さが a の正三角形を合体したものであるから、これを利用して $S(t)$ を求めればよい。(台形=平行四辺形+三角形)

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \left\{ a + \left(a + \frac{2}{\sqrt{3}} vt \right) \right\} vt \\ &= \frac{v^2}{\sqrt{3}} t^2 + avt \end{aligned}$$



イ

$$S(t + \Delta t) = \frac{v^2}{\sqrt{3}} (t + \Delta t)^2 + av(t + \Delta t), \quad S(t) = \frac{v^2}{\sqrt{3}} t^2 + avt \text{ より,}$$

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \left(\frac{2v^2}{\sqrt{3}} t + av \right) \Delta t + \frac{v^2}{\sqrt{3}} (\Delta t)^2$$

ウ

上図および $(\Delta t)^2$ を無視することより,

$$\begin{aligned} E(t) &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \\ &= -B \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \\ &= -Bv \left(\frac{2v}{\sqrt{3}} t + a \right) \end{aligned}$$

エ

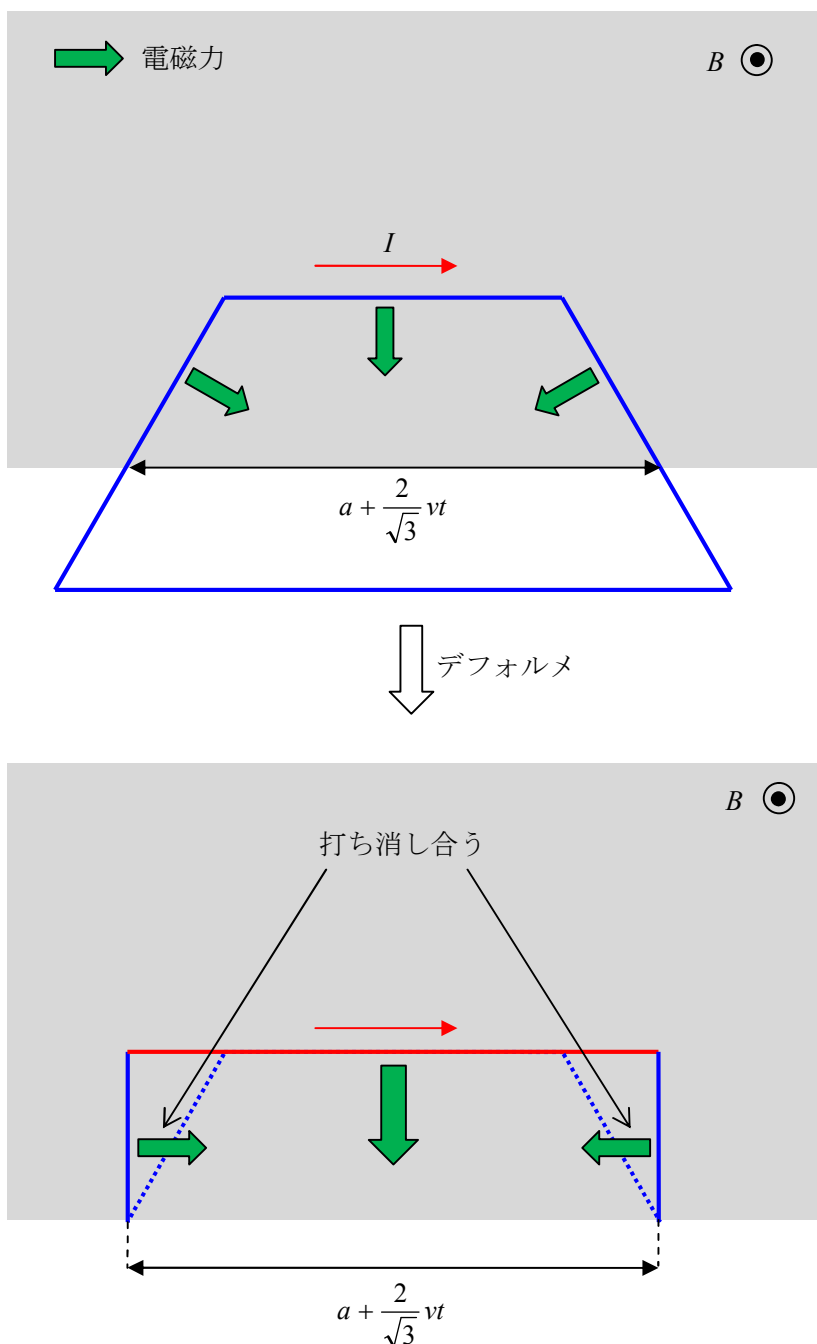
$$I(t) = \frac{E(t)}{4R} = -\frac{Bv}{4R} \left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a \right)$$

オ

$$J(t) = \{I(t)\}^2 \cdot 4R = \frac{(Bv)^2}{4R} \left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a \right)^2$$

カ

磁場中の回路部分を次のようにデフォルメすると処理が楽である。



$F(t) = I(t)BL(t)$ とおくと, $L(t)$ は閉回路の進行方向に垂直な部分の長さだから,

デフォルメ図の赤色実線部の長さより, $L(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}vt + a$

よって,

$$\begin{aligned} F(t) &= -I(t) \cdot B \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}vt + a \right) \\ &= \frac{B^2 v}{4R} \left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a \right)^2 \end{aligned}$$

キ

仕事率は力ベクトルと速度ベクトルの内積だから,

$$\begin{aligned} P(t) &= |F(t)|v \cos 0 \\ &= \frac{(Bv)^2}{4R} \left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a \right)^2 \end{aligned}$$

ク

$0 \leq t \leq t_1$ のとき

$$vt_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ より, } t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2v}a \quad \therefore F(t) = \frac{B^2 v}{4R} \left(\frac{2v}{\sqrt{3}}t + a \right)^2 \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2v}a \right)$$

$t_1 \leq t \leq t_2$ のとき

$$\Delta\Phi = 0 \text{ より, } F(t) = 0$$

$t_2 \leq t \leq t_3$ のとき

閉回路が受ける電磁力の向き, 電磁力磁場中にある面積の微小時間変化の大きさ, 磁束を切る部分で回路に発生する電磁力により相殺し合わない部分の長さの変化が $0 \leq t \leq t_1$ の場合と同じである。

よって, $0 \leq t \leq t_1$ のグラフを t 軸方向に $t_2 \leq t \leq t_3$ の範囲へ平行移動したものになる。

補足: $t_2 \leq t \leq t_3$ のときの詳細

台形の全面積を S , 磁場中の面積を $S_{23}(t)$, 磁場中から抜けだした面積を $O(t)$

とすると,

$$S_{23}(t) = S - O(t)$$

$$S_{23}(t + \Delta t) = S - O(t + \Delta t)$$

よって,

$$S_{23}(t + \Delta t) - S_{23}(t) = -\{O(t + \Delta t) - O(t)\}$$

これと $O(t)$ は \int の $S(t)$ の t を $t - t_2$ に置き換えた関数, すなわち $O(t) = S(t - t_2)$ より,

$$S_{23}(t + \Delta t) - S_{23}(t) = -\{S((t - t_2) + \Delta t) - S(t - t_2)\}$$

$$= -\left\{\frac{2v^2}{\sqrt{3}}(t - t_2) + av\right\}\Delta t < 0 \quad ((\Delta t)^2 \text{ を無視した})$$

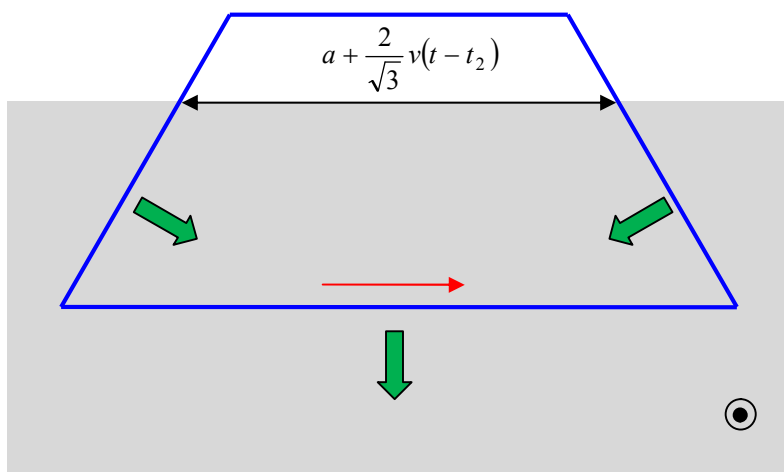
また、レンツの法則より起電力の向きは反時計回り、すなわち正だから、

$$E(t) = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

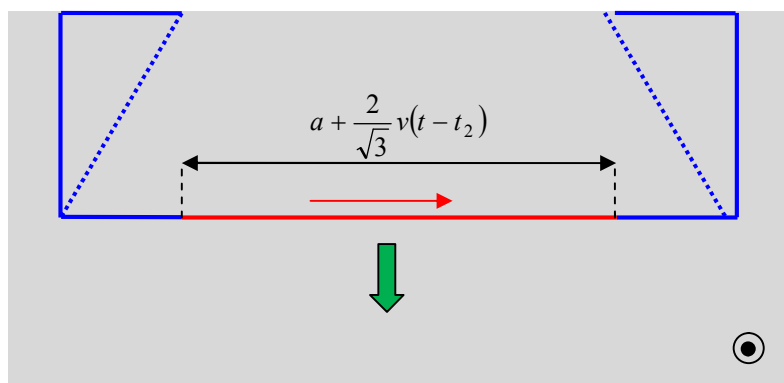
$$= Bv \left\{ \frac{2v}{\sqrt{3}}(t - t_2) + a \right\}$$

$$\therefore I(t) = \frac{E(t)}{4R} = \frac{Bv}{4R} \left\{ \frac{2v}{\sqrt{3}}(t - t_2) + a \right\}$$

磁場中の回路を[刃]と同様にして、デフォルメし、
電磁力が相殺し合わない部分を赤色実線で示した。



↓ デフォルメ



よって,

$$F(t) = I(t) \cdot B \cdot \left\{ \frac{2v}{\sqrt{3}}(t - t_2) + a \right\}$$
$$= \frac{B^2 v}{4R} \left\{ \frac{2v}{\sqrt{3}}(t - t_2) + a \right\}^2$$

$$\text{ゆえに, } F(t) = \frac{B^2 v}{4R} \left\{ \frac{2v}{\sqrt{3}}(t - t_2) + a \right\}^2 \quad \left(t_2 \leq t \leq t_2 + \frac{\sqrt{3}}{2v} a \right)$$

3.

$$\boxed{\text{ア}} \quad 2l \tan \theta \quad \boxed{\text{イ}} \quad \frac{2lk}{\cos \theta} \quad \boxed{\text{ウ}} \quad \frac{2l}{m \cos \theta} \quad \boxed{\text{エ}} \quad \frac{\lambda}{2l \tan \theta} \quad \boxed{\text{オ}} \quad \frac{2l\lambda}{2l + \lambda \cos \theta}$$

$$\boxed{\text{カ}} \quad \frac{f\lambda}{\sqrt{4l^2 \tan^2 \theta - \lambda^2}} \quad \boxed{\text{キ}} \quad \frac{f(\lambda_2 - \lambda)}{\lambda \sin \theta}$$

解説

 $\boxed{\text{ウ}}$

S_0 からの光と S_1 からの光が強め合えばすべての光が強め合う。

S_0 を経由する光と S_1 を経由する光の全光路差は、反射により生じた光路差 $\frac{2l}{\cos \theta}$ である。

S_0 からの光と S_1 からの光の反射回数の差は2だから反射による位相差は0である。

よって、波長 λ が $\frac{2l}{\cos \theta} = m\lambda$ を満たせばよい。

$$\therefore \lambda = \frac{2l}{m \cos \theta}$$

 $\boxed{\text{エ}}$

$d \sin \phi_1 = \lambda$, $d = 2l \tan \theta$, 指示により m は使えないから λ に $\frac{2l}{m \cos \theta}$ を代入できない。

$$\text{よって, } \sin \phi_1 = \frac{\lambda}{2l \tan \theta}$$

 $\boxed{\text{オ}}$

$$\frac{2l}{\cos \theta} = m\lambda \text{ より, } m = \frac{2l}{\lambda \cos \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、波長を連続的に短くしていくと再び強め合う波長 λ_1 は

$$m+1 = \frac{2l}{\lambda_1 \cos \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。

$$\textcircled{1} \text{を}\textcircled{2} \text{に代入すると, } \frac{2l}{\lambda \cos \theta} + 1 = \frac{2l}{\lambda_1 \cos \theta} \quad \therefore \frac{2l + \lambda \cos \theta}{\lambda} = \frac{2l}{\lambda_1}$$

$$\text{よって, } \lambda_1 = \frac{2l\lambda}{2l + \lambda \cos \theta}$$

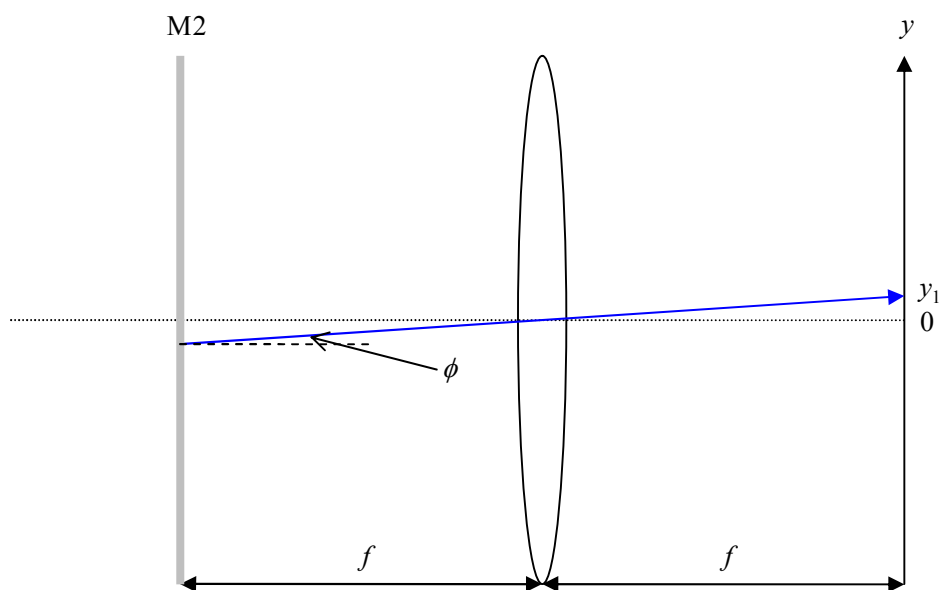
カ

下の 2 図のどちらかを使って解けばよい。

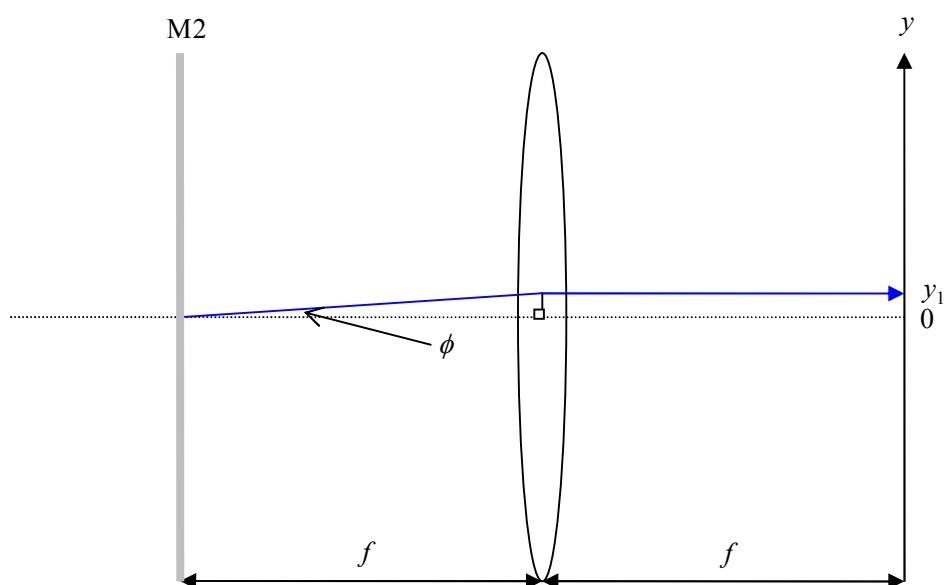
凸レンズに入射した平行光線はすべて焦平面（スクリーン）上の 1 点に集まる。

焦平面：焦点を通り光軸に垂直な平面

レンズの中心を通る光は直進する。



あるいは M2 の焦点と一致する点から出た光は凸レンズを通過後光軸に平行に進む。



光は条件 (1) を満たすから、隣り合う回折光の光路差が λ の平行光線が y_1 に集光する。

つまり、 $d \sin \phi = \lambda$ を満たす回折光が y_1 に集光する。

$$\text{これと } d = 2l \tan \theta \text{ より, } 2l \tan \theta \sin \phi = \lambda \quad \therefore \sin \phi = \frac{\lambda}{2l \tan \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } \frac{y_1}{f} = \tan \phi \text{ より, } y_1 = f \tan \phi \quad \dots \textcircled{2}$$

①および $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ より,

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{\sin \phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{2l \tan \theta}}{\sqrt{4l^2 \tan^2 \theta - \lambda^2}} \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{4l^2 \tan^2 \theta - \lambda^2}} \end{aligned}$$

$$\text{これを②に代入することにより, } y_1 = \frac{f\lambda}{\sqrt{4l^2 \tan^2 \theta - \lambda^2}}$$

補足

問題文に記述されていないため正解とならないかもしれないが、 ϕ は十分小さいから、 $\tan \phi = \sin \phi$ としてよい。

$$\text{これと①より, } \tan \phi = \frac{\lambda}{2l \tan \theta}$$

$$\text{これを②に代入することにより, } y_1 = \frac{f\lambda}{2l \tan \theta}$$

キ

求める明点の y 座標を y_2 とし,

$$y_2 \text{ に集光する隣り合う光の全光路差} = \frac{2l}{\cos \theta} + 2l \tan \theta \sin \phi' = m\lambda_2 \text{ とすると,}$$

$$m\lambda < m\lambda_2 < (m+1)\lambda \text{ および } \frac{2l}{\cos \theta} \text{ は条件(1)を満たすことから } \frac{2l}{\cos \theta} = m\lambda$$

$$\text{よって, } m\lambda + 2l \tan \theta \sin \phi' = m\lambda_2$$

$$\therefore \sin \phi' = \frac{m}{2l \tan \theta} (\lambda_2 - \lambda)$$

$$\text{これと } m = \frac{2l}{\lambda \cos \theta} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \sin \phi' &= \frac{2l}{2l \tan \theta} (\lambda_2 - \lambda) \\ &= \frac{1}{\lambda \cos \theta \tan \theta} (\lambda_2 - \lambda) \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda \sin \theta} \end{aligned}$$

解法 1

$$\begin{aligned} \therefore \tan \phi' &= \frac{\sin \phi'}{\sqrt{1 - \sin^2 \phi'}} \\ &= \frac{\frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda \sin \theta}}{\sqrt{(\lambda \sin \theta)^2 - (\lambda_2 - \lambda)^2}} \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda}{\sqrt{(\lambda \sin \theta)^2 - (\Delta\lambda)^2}} \\ &\approx \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda \sin \theta} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} y_2 &= f \tan \phi' \\ &= \frac{f(\lambda_2 - \lambda)}{\lambda \sin \theta} \end{aligned}$$

解法 2

$$\sin \phi' = \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda \sin \theta} \text{ および } \lambda_2 - \lambda \text{ が微小であることから, } \tan \phi' \approx \sin \phi' = \frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda \sin \theta}$$

$$\text{よって, } y_2 = f \tan \phi' = \frac{f(\lambda_2 - \lambda)}{\lambda \sin \theta}$$