

## 1 次反応の微分方程式

### 1 次反応とは

1つの反応物質が自然にあるいは壁に衝突するなどして化学変化する場合、反応速度  $v$  は反応物質のモル濃度に比例し、 $v = k[\text{反応物質}]$  と表せる。反応速度式が反応物質のモル濃度についての 1 次式（反応次数 1）だから、このような反応を 1 次反応という。

### 1 次反応の微分方程式とその解

放射性元素 A の壊変

$$1 \text{ 次反応の速度式 } v = k[A] \quad \dots \textcircled{1}$$

濃度  $[A]$  における瞬間の反応の速さは、

$$d[A] < 0 \text{ より、}$$

$$v = -\frac{d[A]}{dt} \quad \dots \textcircled{2} \quad (\text{速さは速度の大きさのことで、0 以上の値をとる})$$

①, ②より 1 次反応の微分方程式は、

$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]$$

次に、この微分方程式を解く。

$$\frac{1}{[A]} d[A] = -k dt \text{ と変形し、}$$

$$\int \frac{1}{[A]} d[A] = -\int k dt \text{ の不定積分を行うと、}$$

$$\log[A] = -kt + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\therefore [A] = e^C \cdot e^{-kt}$$

$e^C$  の値を求める。

反応開始時の濃度を  $[A]_0$  とすると、

$t = 0$  のとき  $[A] = [A]_0$  だから、

$$[A]_0 = e^C \cdot e^0 = e^C \quad \therefore e^C = [A]_0$$

よって、

$$[A] = [A]_0 e^{-kt} \quad \dots \textcircled{3}$$

半減期を  $T$  とすると、 $t = T$  のとき、 $[A] = \frac{1}{2}[A]_0$  だから、

$$\frac{1}{2}[A]_0 = [A]_0 e^{-kT}$$

$$\therefore e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

よって、 $e^{-kt} = (e^{-kT})^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

これを③に代入すると、 $[A] = [A]_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

