ガウス記号と群数列　その 2

数列$\frac{1^2}{2},\frac{1^2}{3},\frac{1^2}{4},\frac{2^2}{4},\frac{1^2}{5},\frac{2^2}{5},\frac{1^2}{6},\frac{2^2}{6},\frac{3^2}{6},\cdots,\frac{1^2}{n},\frac{2^2}{n},\cdots,\frac{\left[\frac{n}{2}\right]^2}{n},\frac{1^2}{n+1},\cdots$に対して，
次の問に答えよ。
ただし，$[x]$はx以下の整数の中で最大のものを表す。

(1) $\frac{15^2}{31}$は第何項に初めて現れるか。

(2) 初項から(1)で求めた項までの和を求めよ。

（横浜国立大学）

解説と解答

(1)

分母がnのときの分子の最後の数$\left[\frac{n}{2}\right]^2$の$\left[\frac{n}{2}\right]$について

$\left[\frac{n}{2}\right]=k$とすると，$\left[\frac{n}{2}\right]\leq\frac{n}{2}<\left[\frac{n}{2}\right]+1$より，$k\leq\frac{n}{2}<k+1$

$\therefore 2k\leq n<2k+2$

nは整数だから，$n=2k,2k+1$

これらのことから，分母が$2k$または$2k+1$のときの項数はkであることがわかる。

つまり，$\frac{1^1}{2k},\frac{2^2}{2k},\cdots,\frac{k^2}{2k},\frac{1^2}{2k+1},\frac{2^2}{2k+1},\cdots,\frac{k^2}{2k+1}$

よって，

$k=1$のとき：分母 2,3，項数 1

$k=2$のとき：分母 3,4，項数 2

$k=3$のとき：分母 5,6，項数 3

$\vdots$

$k=15$のとき：分母 30,31，項数 15

$\frac{15^2}{31}$は分母が 31 の最後の項だから，

$$2(1+2+3+\cdots+15)=2\cdot\frac{1+15}{2}\cdot 15=240$$

よって，第 240 項　・・・(答)

(2)

$n=2k,2k+1$分母とする群の各項の和は,

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{2k}+\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{2k+1}=\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}\right)\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2\right)$$
$$=\frac{4k+1}{2k(2k+1)}\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{12}\left(4k^2+5k+1\right)$$

$\frac{15^2}{31}$は$n=30,31$を分母とする群の最後の項だから,

初項から$\frac{15^2}{31}$までの和は,

$$\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{15}\left(4k^2+5k+1\right)=\frac{1}{12}\left(4\cdot\frac{15\cdot(15+1)\cdot(2\cdot15+1)}{6}+5\cdot\frac{15\cdot(15+1)}{2}+15\right)$$
$$=\frac{1}{12}\left(\frac{4\cdot15\cdot16\cdot31}{6}+\frac{5\cdot15\cdot16}{2}+15\right)$$
$$=\frac{5575}{12}$$

よって, $\frac{5575}{12}$ ・・・(答)