ガウス記号と約数の個数問題

問題

実数aに対して，aを超えない最大の整数を$[a]$で表す。

10000 以下の正の整数nで$\left[\sqrt{n}\right]$がnの約数となるものは何個あるか。

（2012　東京工業大学）

解

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$（$k$ は自然数）とすると，$k \le \sqrt{n} < k+1$ より，$k^2 \le n < k^2+2k+1$ だから，

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$ を約数にもつ n は $n = k^2,\ k(k+1),\ k(k+2)$

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$ を約数にもつ n が k^2 のとき

$1 \le k^2 \le 10000$ より，$1 \le k \le 100$　よって 100 個ある。

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$ を約数にもつ n が $k(k+1)$ のとき

$1 \le k(k+1) \le 10000$ より，$1 \le k \le 99$　よって，99 個ある。

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$ を約数にもつ n が $k(k+2)$ のとき

$1 \le k(k+2) \le 10000$ より，$1 \le k \le 99$　よって，99 個ある。

ゆえに，10000 以下の正の整数 n で $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ が n の約数となるものの個数は

$100 + 2 \times 99 = 298$　・・・(答)

補足

実験すると，

n	$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$
1	**1**
2	**1**
3	**1**
4	**2**
5	2
6	**2**
7	2
8	**2**
9	**3**
10	3
11	3
12	**3**
13	3
14	3
15	**3**

これより，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ を約数にもつ n は 3 つずつあることがわかる。

これを $[A] = m \Leftrightarrow m \le A < m+1$ を利用して示せばよい。