$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f'(0)=a$ が成り立つとき，
$f(0)=0$ であることを示せ。
$f'(x)$ を求めよ。

解

$f(0)=0$ を示す。

上記の条件を満たす p についての関数 q を $q=f(p)$ とすると，

$x=y=0$ のとき，$f(0+0)=f(0)+f(0)$　$\therefore f(0)=0$　・・・①

補足

$y=-x$ のとき，$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$ より，$f(0)=f(x)+f(-x)$　・・・②

①，②より，

$f(x)=-f(-x)$

よって，関数 $q=f(p)$ は奇関数である。

$f'(x)$ を求める。

座標 $(x,f(x))$，$(y,f(y))$，$(x+y,f(x+y))$ について

微分係数 $f'(x)$ と導関数の定義より，

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{(x+y)-x}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}$$

ここで，$f(x+y)-f(x)=f(y)$ より，

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}\quad\cdots③$$

微分係数 $f'(0)=a$ と導関数の定義より，

$$f'(0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}$$

ここで，$f(0)=0$ より，

$$f'(0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}\quad\therefore \lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=a\quad\cdots④$$

③，④より，$f'(x)=a$