171　球形容器中の気体の断熱膨張

(1)

気体分子の速さの壁に垂直な成分が壁と弾性衝突するから，

気体分子の速さの壁に垂直な成分と

壁の速さ（半径 r が増加する速さ）の相対速度について，

$$\frac{\text{衝突直後の相対速度}}{\text{衝突直前の相対速度}}=-1$$

となる。

半径が増加する方向を速度の正方向，

衝突直後の壁から見た気体分子の速さの壁に垂直な成分を v' とすると，

衝突直前の壁から見た気体分子の速度の壁に垂直な成分＝$v\cos\theta-u$

衝突直後の壁から見た気体分子の速度の壁に垂直な成分＝$-v'-u$

より，$\dfrac{-v'-u}{v\cos\theta-u}=-1$

$\therefore v'=v\cos\theta-2u$　・・・(答)

(2)

速さが変化するのは気体分子の速さの壁に垂直な成分だから，

この運動エネルギー変化を求めればよい。

よって，$\dfrac{1}{2}m(v\cos\theta-2u)^2-\dfrac{1}{2}m(v\cos\theta)^2=-2muv\cos\theta+2mu^2$

u の 2 次の項は無視するから，

$-2muv\cos\theta$　・・・(答)

(3)

衝突する 2 点間の距離＝$2r\cos\theta$，気体分子の速さ＝v より，

衝突 1 回の時間＝$\dfrac{2r\cos\theta}{v}$

半径が Δr 増加するのにかかる時間 $\dfrac{\Delta r}{u}$

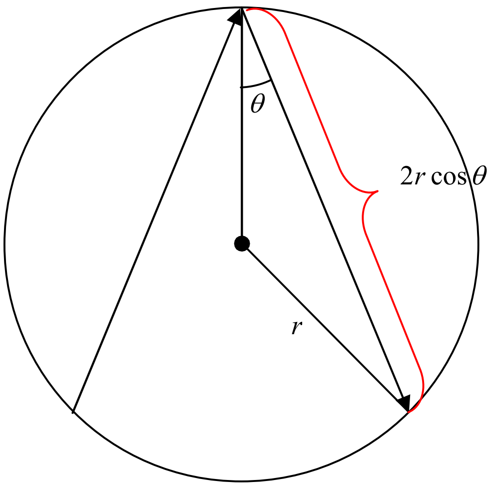
よって，衝突回数は，$\dfrac{\Delta r}{u}\div\dfrac{2r\cos\theta}{v}=\dfrac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}$　・・・(答)

あるいは，

半径が Δr 増加する間に気体分子は，距離 $v\cdot\dfrac{\Delta r}{u}$ 進む。

これと衝突する 2 点間の距離＝$2r\cos\theta$ より，

$v\cdot\dfrac{\Delta r}{u}\div 2r\cos\theta=\dfrac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}$　・・・(答)



(4)

(2)，(3)より，

$$-2muv\cos\theta\times\frac{v\Delta r}{2ur\cos\theta}=-\frac{mv^2\Delta r}{r}\quad\cdots(答)$$

(5)

$$\begin{aligned}\Delta V&=(V+\Delta V)-V\\&=\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3\\&=\frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^3-\frac{4}{3}\pi r^3\\&\approx\frac{4}{3}\pi r^3\left(1+3\cdot\frac{\Delta r}{r}\right)-\frac{4}{3}\pi r^3\\&=4\pi r^2\Delta r\end{aligned}$$

(6)

アボガドロ数を N_A とすると，容器内の気体の物質量は 1mol だから，気体分子の数は N_A

これと(4)より，$\Delta U=N_A\cdot-\dfrac{mv^2\Delta r}{r}$

また，$U=N_A\cdot\dfrac{1}{2}mv^2$

よって，$\dfrac{\Delta U}{U}=\dfrac{-\dfrac{N_Amv^2\Delta r}{r}}{\dfrac{N_Amv^2}{2}}=-\dfrac{2\Delta r}{r}$

(7)

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{4\pi r^2\Delta r}{\frac{4\pi r^3}{3}}=\frac{3\Delta r}{r}$$

$$\frac{\Delta U}{U}=-\frac{2\Delta r}{r}$$

よって，$\dfrac{\Delta U}{U}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\Delta V}{V}$

(8)

$$\Delta U=\frac{3}{2}\left(P\cdot\Delta V+\Delta P\cdot V\right)\quad・・・①$$

$$U=\frac{3}{2}PV\quad・・・②$$

$\dfrac{①}{②}$ より，$\dfrac{\Delta U}{U}=\dfrac{P\cdot\Delta V+\Delta P\cdot V}{PV}$　$\therefore\dfrac{\Delta U}{U}=\dfrac{\Delta V}{V}+\dfrac{\Delta P}{P}$

$$\therefore\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta U}{U}-\frac{\Delta V}{V}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}-\frac{\Delta V}{V}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}$$

あるいは,

$$\frac{2}{3}\Delta U=P\cdot\Delta V+\Delta P\cdot V$$

$$\therefore\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta U}{P}=\Delta V+\frac{\Delta P}{P}V$$

$$\therefore\frac{\Delta P}{P}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta U}{PV}-\frac{\Delta V}{V}$$

ここで，$U=\dfrac{3}{2}PV$ より，$\dfrac{\Delta U}{PV}=\dfrac{3\Delta U}{2U}$

$$\therefore\frac{\Delta P}{P}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3\Delta U}{2U}-\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta U}{U}-\frac{\Delta V}{V}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}-\frac{\Delta V}{V}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}$$