関数 $f(x)=\dfrac{a-\cos x}{a+\sin x}$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で極大値を持つように，定数 a の値の範囲を定めよ。
また，その極大値が 2 となるときの a の値を求めよ。

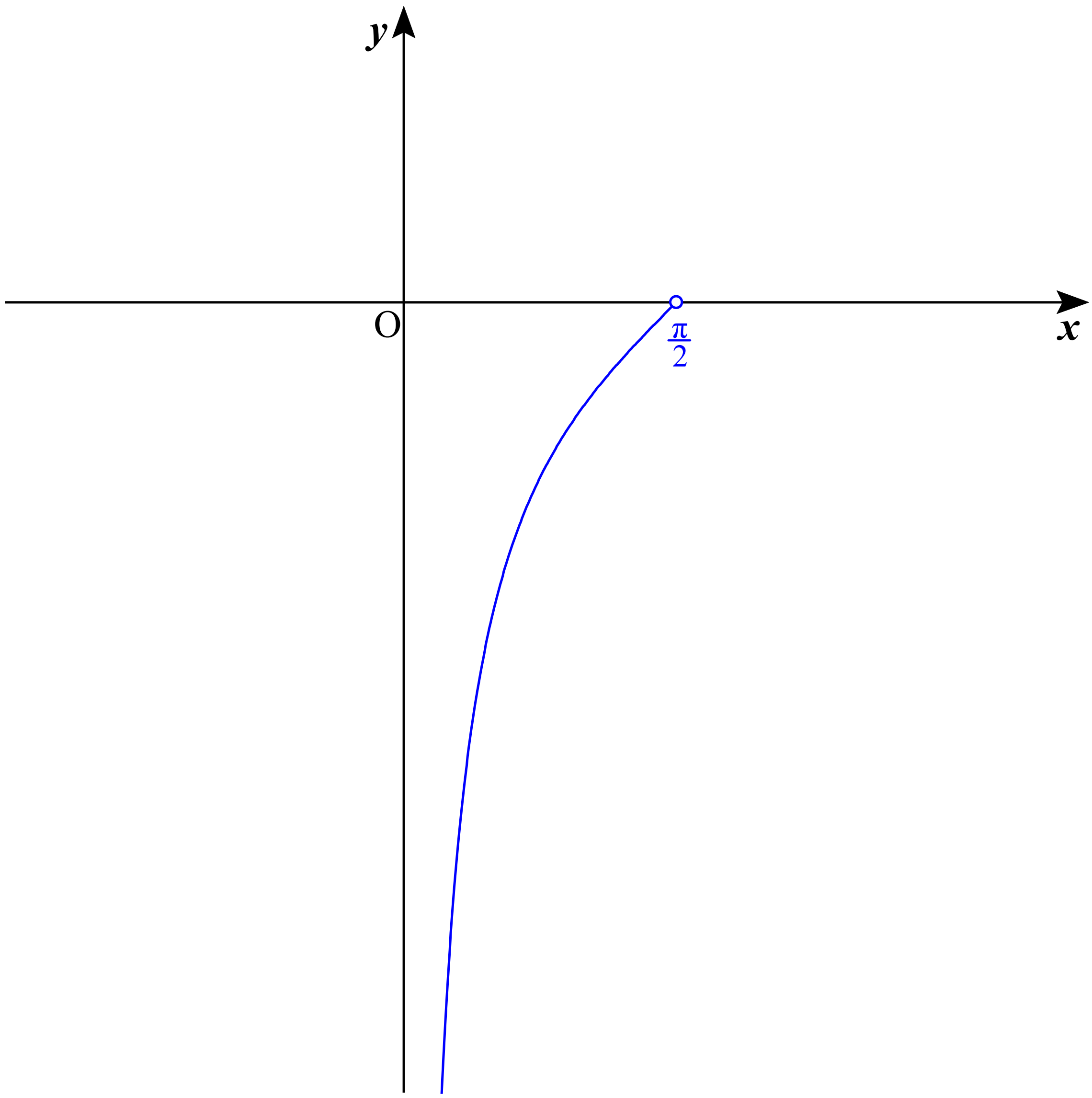
解法 1

$a=0$ のとき

$f(x)=\dfrac{-\cos x}{\sin x}=-\dfrac{1}{\tan x}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y=f(x)=-\dfrac{1}{\tan x}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフより， $f(x)$ は極大値をもたないことがわかる。

よって， $a\neq 0$ の場合で考えを進めていく。



関数 $f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件は，

$f'(\alpha)=0$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす α が少なくとも 1 つ存在しかつ

$f'(x)$ が $x=\alpha$ を挟んで正（ $f(x)$ が増加）から負（ $f(x)$ が減少）に変化することである。
そこで，まず $f'(x)$ を求めると，

$$f'(x)=\frac{a-\cos x}{a+\sin x}=\frac{\sin x(a+\sin x)-\cos(a-\cos x)}{(a+\sin x)^2}=\frac{a(\sin x-\cos x)+1}{(a+\sin x)^2}$$

次に，関数 $f'(x)$ の正負の振る舞いについて，分母 $(a+\sin x)^2>0$ より，
分子 $a(\sin x-\cos x)+1$ の正負の振る舞いで考える。

$g(x)=a(\sin x-\cos x)+1\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$g'(x)=a(\cos x+\sin x)$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $\cos x>0$， $\sin x>0$ より， $\cos x+\sin x>0$

よって，
$a>0$ のとき $g'(x)>0$ より， $g(x)$ は単調増加する。
$a<0$ のとき $g'(x)<0$ より， $g(x)$ は単調減少する。
したがって，
$f'(x)$ は $a>0$ のとき単調増加， $a<0$ のとき単調減少する。
関数 $f(x)$ が極大値をもつための必要条件は，
$f'(x)$ が単調減少することだから， $a<0$ でなければならない。
よって，
関数 $f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件は，

$a<0$ かつ $f'(\alpha)=0$ となる $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ が存在しかつ

$0<x<\alpha$ において $f'(x)>0$ かつ $\alpha<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)<0$ であることである。

よって， $a<0$ かつ，中間値の定理より $f'(0)>0$ かつ $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ であればよい。

$\therefore f'(0)=\dfrac{-a+1}{a^2}>0 \quad \therefore a<1$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{a+1}{(a+1)^2}<0 \quad \therefore a<-1$

以上より，関数 $f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件は， $a<0$ かつ $a<1$ かつ $a<-1$，
すなわち $a<-1$ ・・・(答)

極大点を$(\alpha, f(\alpha))$とすると，

$f'(\alpha)=0$ より， $f'(\alpha)=\dfrac{a(\sin\alpha-\cos\alpha)+1}{(a+\sin\alpha)^2}$ $\therefore a(\sin\alpha-\cos\alpha)+1=0$ ・・・①

$f(\alpha)=2$ より， $f(\alpha)=\dfrac{a-\cos\alpha}{a+\sin\alpha}=2$ $\therefore a=-2\sin\alpha-\cos\alpha$ ・・・②

①に②を代入すると，

$(-2\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)+1=0$

$(2\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)-1=0$

$\therefore 2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha-1=0$

両辺を$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$倍する， $2\tan^2\alpha-\tan\alpha-1-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=0$

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$ より， $\tan^2\alpha-\tan\alpha-2=0$

$\therefore(\tan\alpha+1)(\tan\alpha-2)=0$

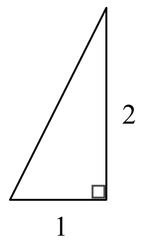
これと$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より， $\tan\alpha>0$

$\therefore\tan\alpha=2$

$\therefore\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$， $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

②に代入することにより，

$a=-2\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{-4}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{5}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$ ・・・(答)



解法 2

$f(x)=\dfrac{a-\cos x}{a+\sin x}$ について,

点 $\mathrm{P}(a,a)$，動点 $\mathrm{Q}(-\sin x,\cos x)$ とおき，これらの点を原点を O，t 軸を横軸，y 軸を縦軸，t 軸となす角を x とする直交座標系にプロットすると，$f(x)$ はその座標系における線分 PQ の傾きを表す。よって, その傾きが極大値をもつように定数 a の範囲を定めればよい。

点 P は $y=t$ 上の点であり,

動点 Q は，$(-\sin x,\cos x)=\left(\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right),\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，$\dfrac{\pi}{2}<x+\dfrac{\pi}{2}<\pi$ より,

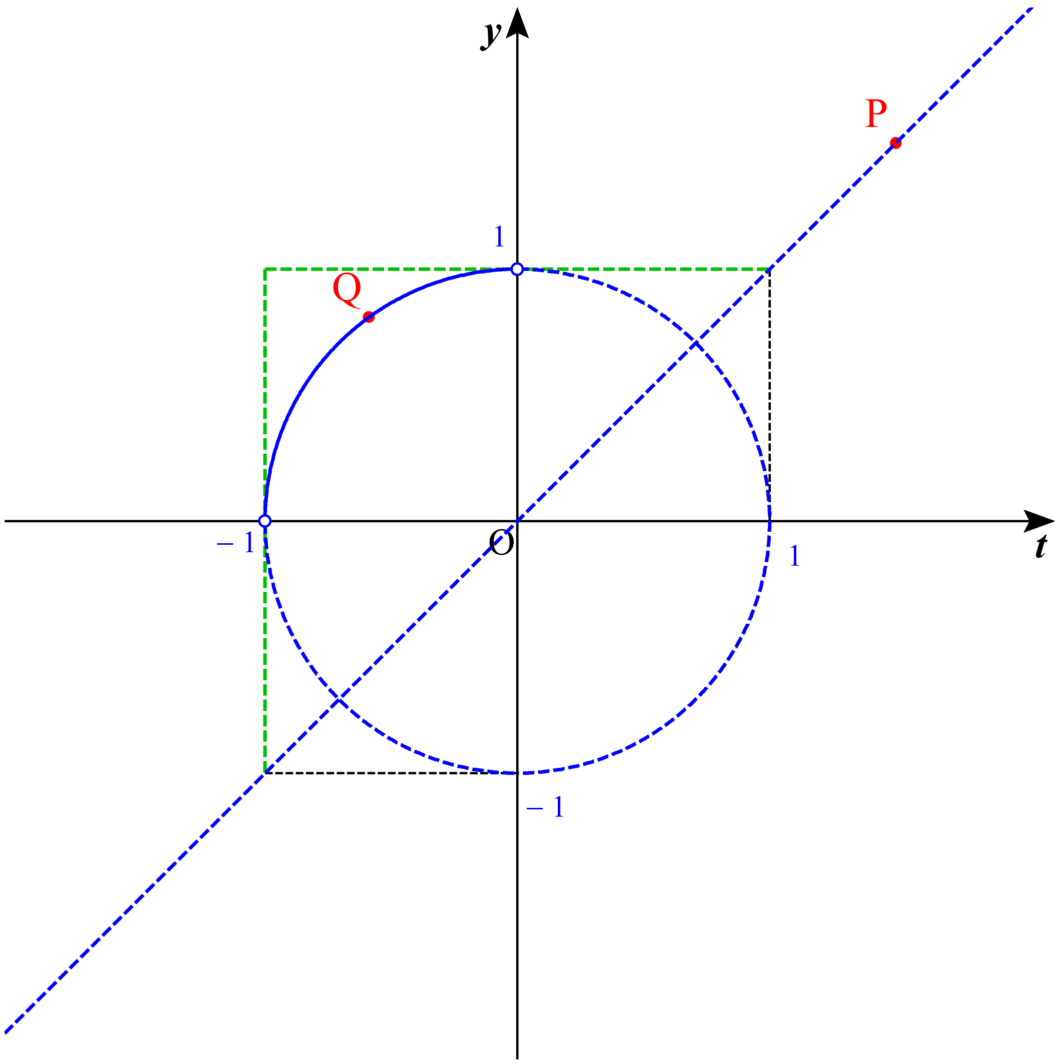
単位円周上の第 3 象限の部分を動くことがわかる。

直線 PQ が点 Q で円と接することができる場合

線分 PQ が単位円の第 3 象限と接することができるのは,

円外の点から円に引いた接線の関係と下図の緑色破線より,

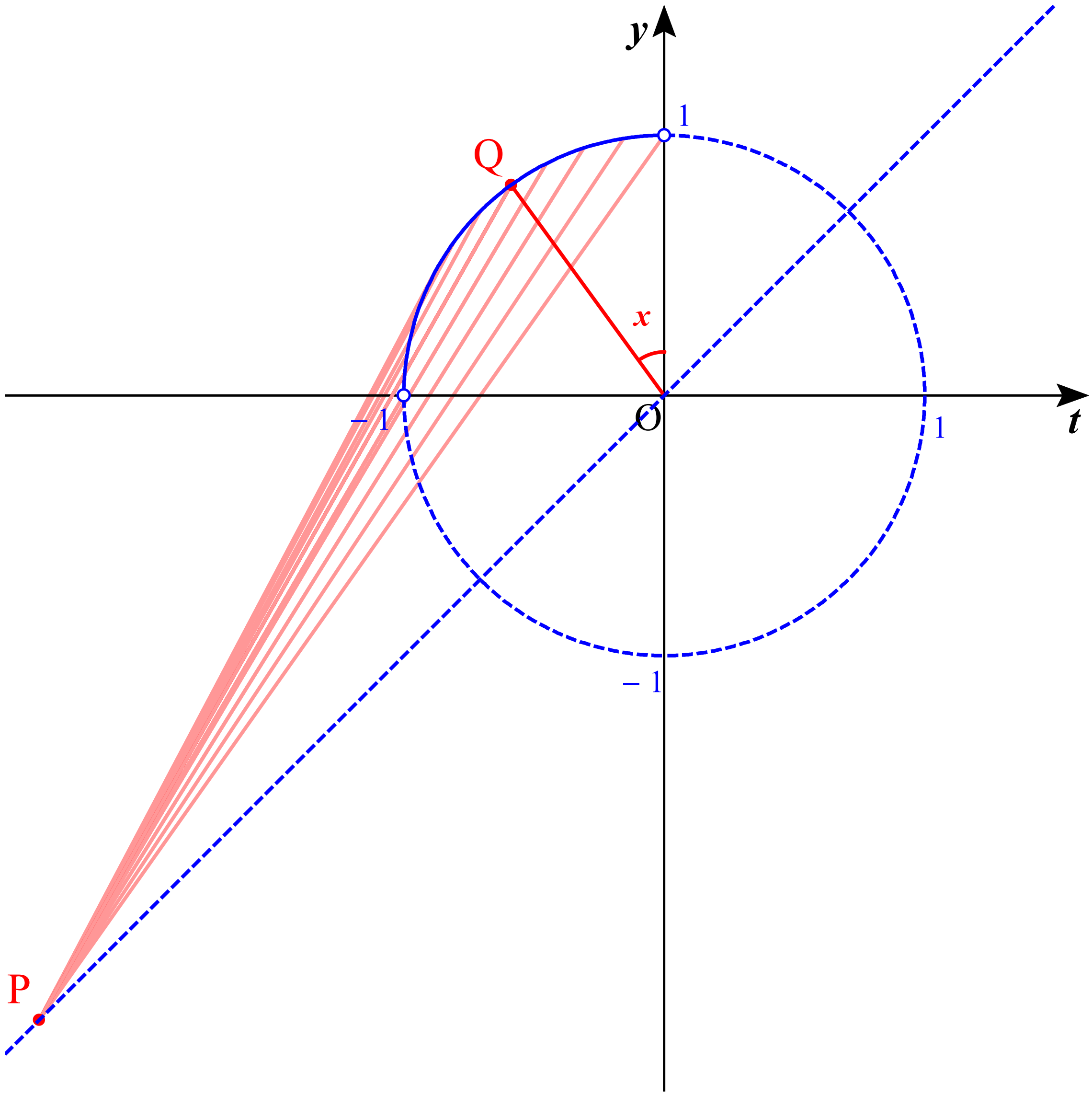
$a<-1$ と $1<a$ の場合があることがわかる。



$a<-1$ のとき

x を 0 から徐々に増加させていくと，
直線 PQ と点 O との距離が大きくなっていくに従ってその傾きも増加し，
その距離が 1 になったとき，すなわち円と直線 PQ が点 Q で接したとき
直線 PQ の傾きが最大になる。

よって，$a<-1$ のとき関数 $f(x)=\dfrac{a-\cos x}{a+\sin x}$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で極大値をもつ。



$1 < a$ のとき

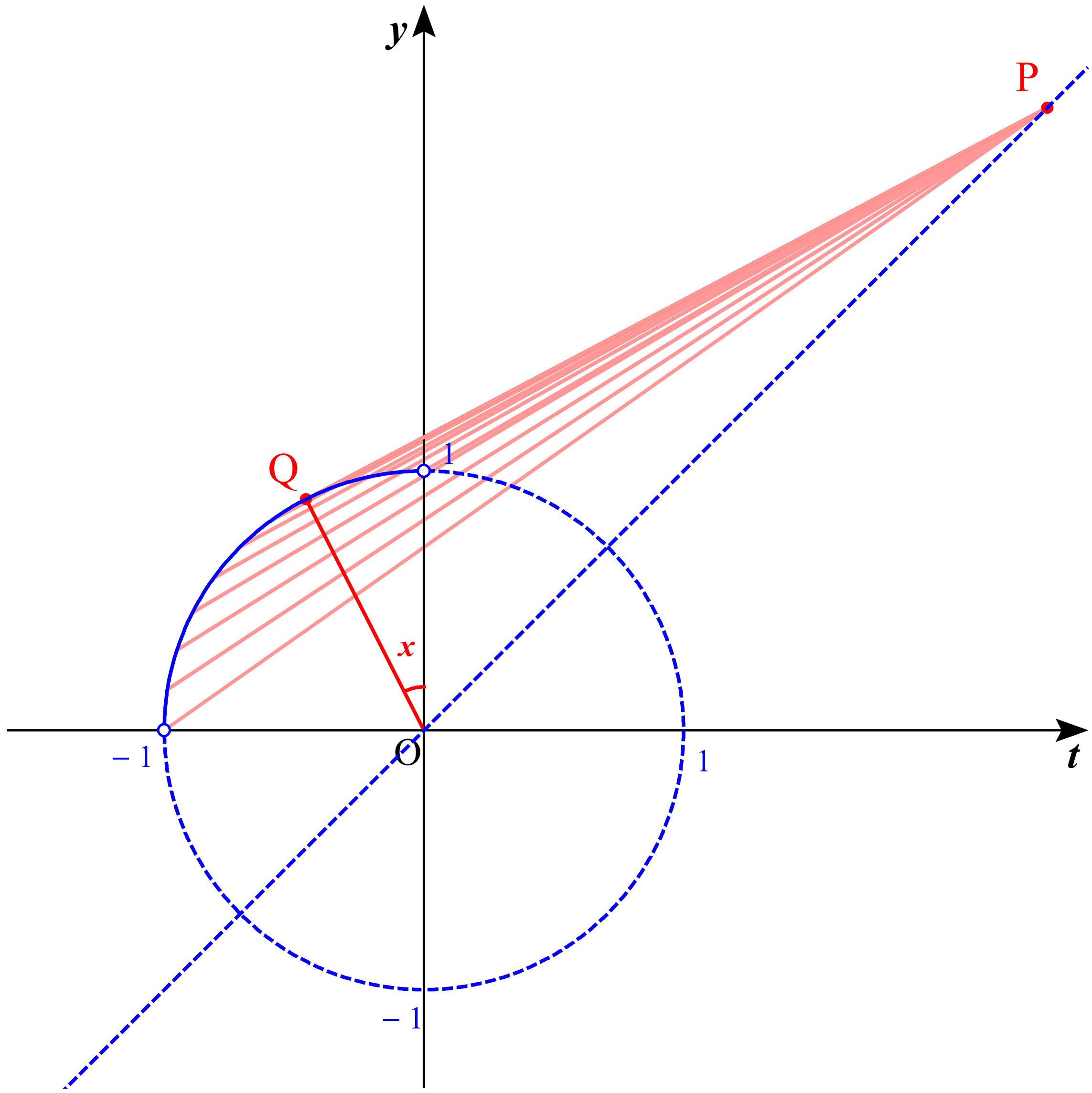
x を 0 から徐々に増加させていくと，

直線 PQ と点 O との距離が大きくなっていくに従ってその傾きが減少し，

その距離が 1 になったとき，すなわち円と直線 PQ が点 Q で接したとき

直線 PQ の傾きが最小になる。

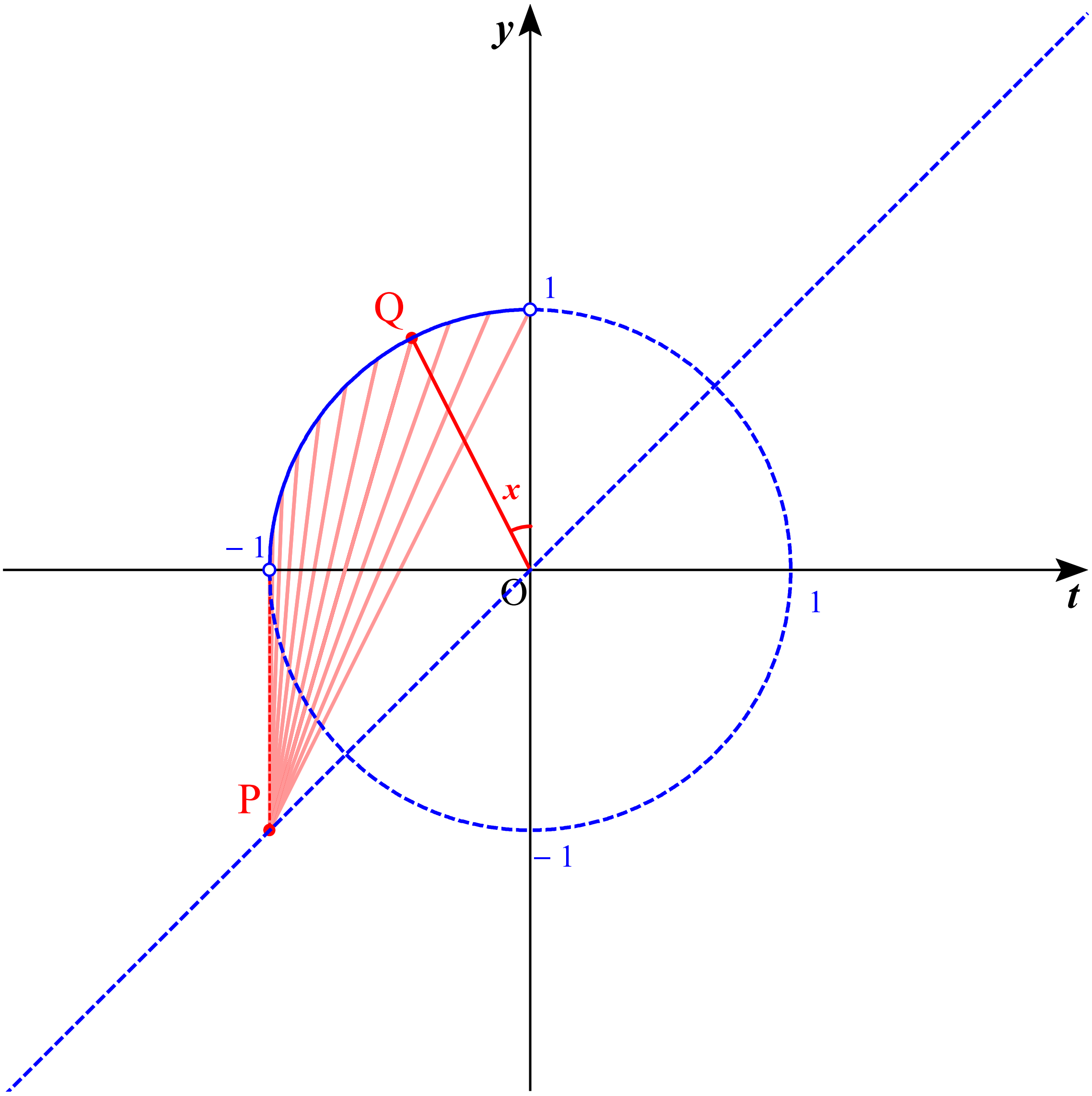
よって，$a < -1$ のとき関数 $f(x) = \dfrac{a - \cos x}{a + \sin x}$ が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で極小値をもつ。



直線 PQ が点 Q で円と接することができない場合

$a=-1$ のとき

　x を 0 から徐々に増加させていくと，直線 PQ の傾きは単調に増加する。

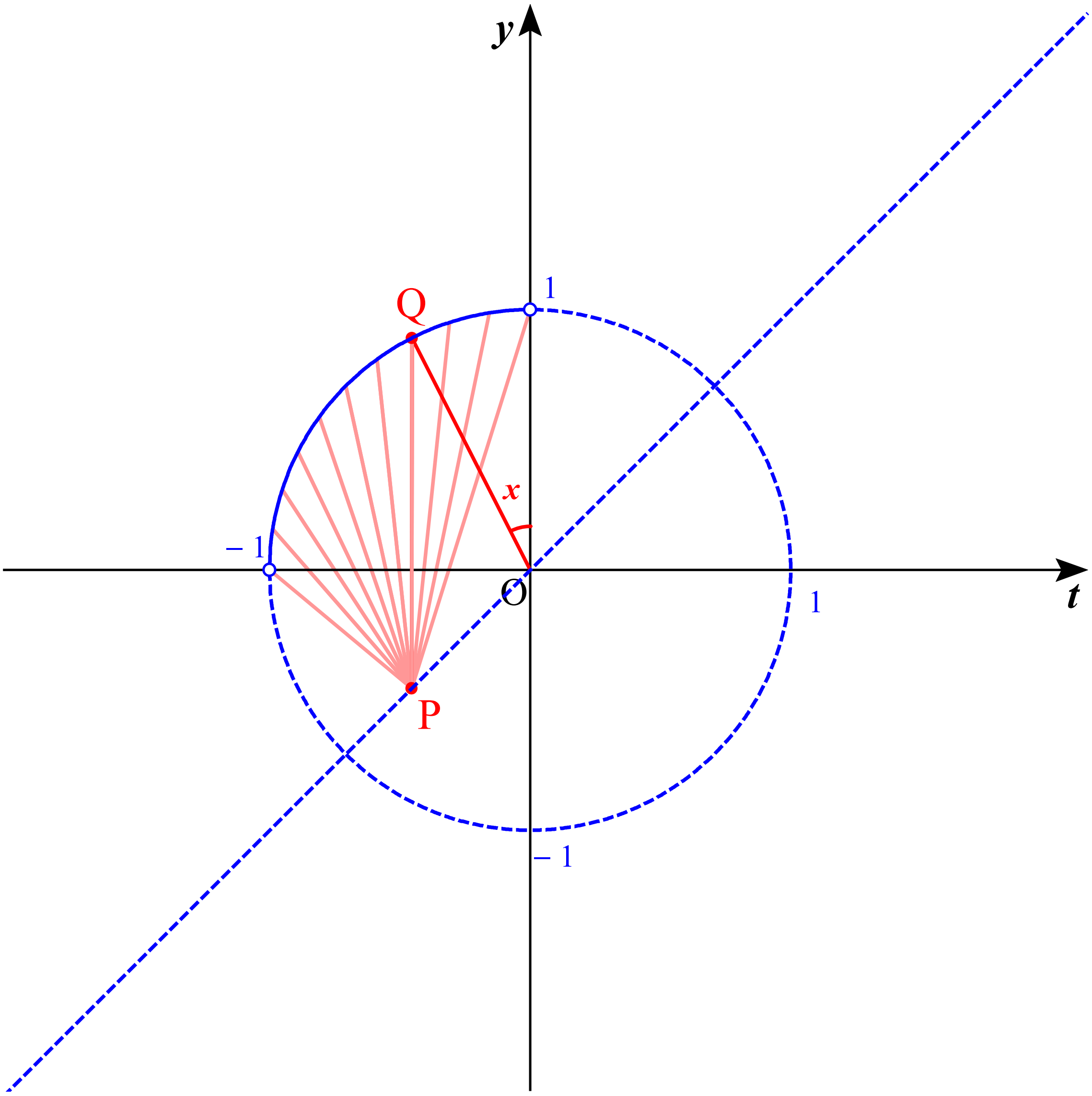


$-1<a<0$ のとき

x を 0 から徐々に増加させていくと，直線 PQ が y 軸と平行になったとき，

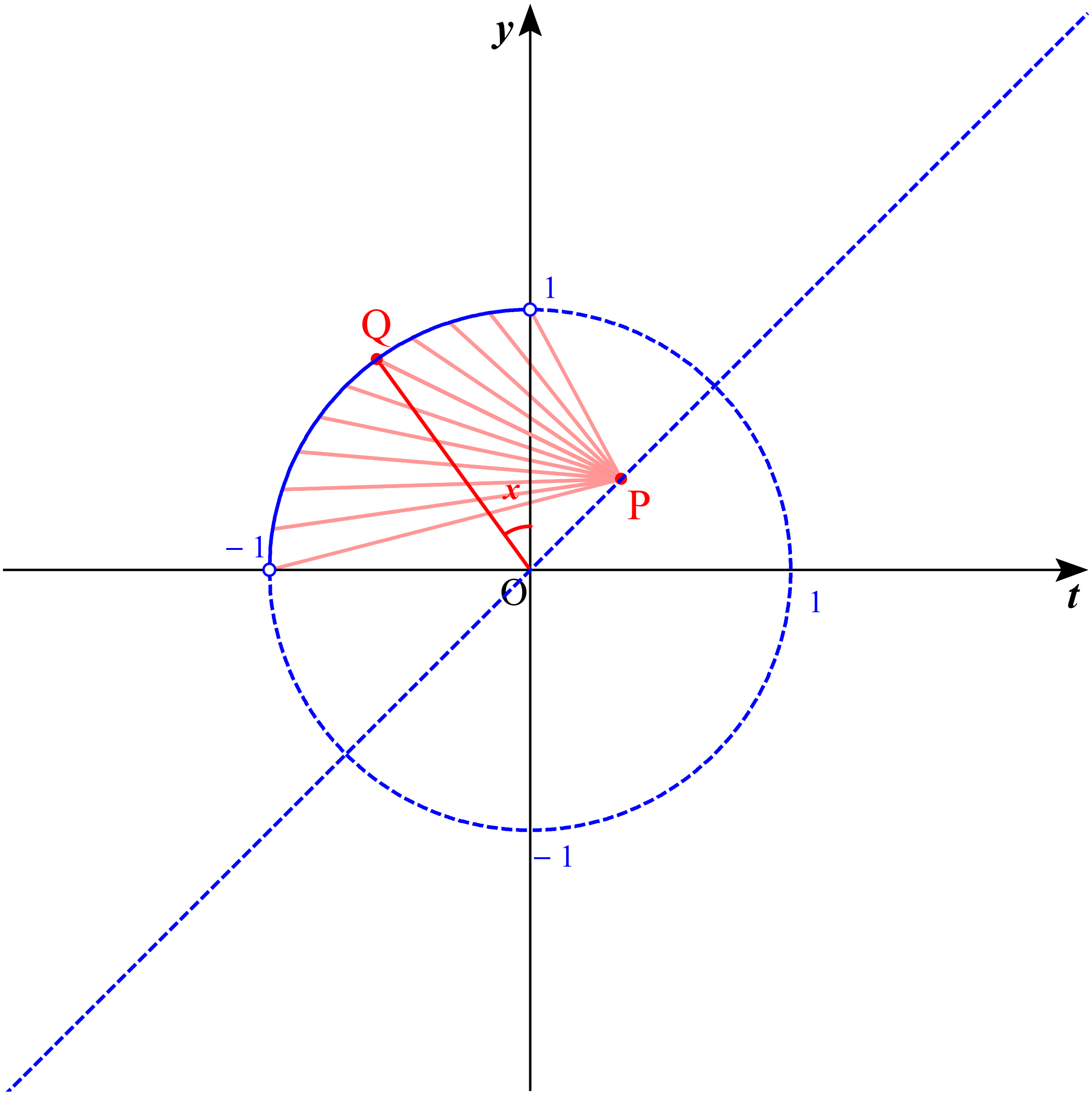
その傾きは無限大になる。

その後，傾きは負の無限大から単調に増加していく。



$0 \le a < 1$ のとき

x を 0 から徐々に増加させていくと，直線 PQ の傾きは単調に増加する。



以上より，

関数 $f(x)=\dfrac{a-\cos x}{a+\sin x}$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で極大値をもつ定数 a の範囲は $a<-1$ である。

関数 $f(x)=\dfrac{a-\cos x}{a+\sin x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の極大値が 2 となるときの a の値

極大値が 2 となるときの x を α とすると,

$OQ \perp PQ$ より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

これと $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\alpha-a\\ \cos\alpha-a\end{pmatrix}=a(\sin\alpha-\cos\alpha)+1$

より，$a(\sin\alpha-\cos\alpha)+1=0$ ・・・①

$f(\alpha)=2$ より，$f(\alpha)=\dfrac{a-\cos\alpha}{a+\sin\alpha}=2$ $\therefore a=-2\sin\alpha-\cos\alpha$ ・・・②

①に②を代入すると,

$(-2\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)+1=0$

$(2\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)-1=0$

$\therefore 2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha-1=0$

両辺を $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ 倍する，$2\tan^2\alpha-\tan\alpha-1-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=0$

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$ より，$\tan^2\alpha-\tan\alpha-2=0$

$\therefore(\tan\alpha+1)(\tan\alpha-2)=0$

これと $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\tan\alpha>0$

$\therefore \tan\alpha=2$

$\therefore \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

②に代入することにより,

$a=-2\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{-4}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{5}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$ ・・・(答)