$\boxed{1}$

(1)

（ｉ）

$\sqrt[3]{4}$ と $\sqrt[4]{6}$ の大小関係

$\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=\left(2^2\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[4]{6}=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}$ より，

$$\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{6}}\right)^{12}=\frac{\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{12}}{\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{12}}=\frac{2^8}{2^3\cdot 3^3}=\frac{2^5}{3^3}=\frac{32}{27}>1$$

$\therefore \sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{6}$　・・・①

$\sqrt[3]{4}$ と $\sqrt[5]{10}$ の大小関係

$\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[5]{10}=2^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}$ より，

$$\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{10}}\right)^{15}=\frac{\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{\left(10^{\frac{1}{5}}\right)^{15}}=\frac{2^{10}}{10^3}=\frac{1024}{1000}>1$$

$\therefore \sqrt[3]{4}>\sqrt[5]{10}$　・・・②

$\sqrt[4]{6}$ と $\sqrt[5]{10}$ の大小関係

$$\left(\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[5]{10}}\right)^{20}=\frac{\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\right)^{20}}{\left(2^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{5}}\right)^{20}}=\frac{2^5\cdot 3^5}{2^4\cdot 5^4}=\frac{2\cdot 3^5}{5^4}=\frac{486}{625}<1$$

$\therefore \sqrt[5]{10}>\sqrt[4]{6}$　・・・③

①，②，③より，

$\sqrt[4]{6}<\sqrt[5]{10}<\sqrt[3]{4}$

よって，これらを小さい方から順に並べると，

$\sqrt[4]{6}$ 、$\sqrt[5]{10}$，$\sqrt[3]{4}$　・・・(答)

（ⅱ）

対数の底を 3 に統一してから大小比較をする。

$\frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 \sqrt{27}$

$\log_{\sqrt{3}} 2 = \frac{\log_3 2}{\log_3 \sqrt{3}} = 2\log_3 2 = \log_3 4$

$\log_3 5$

$4^2 < 5^2 < \left(\sqrt{27}\right)^2$ より， $4 < 5 < \sqrt{27}$

$\therefore \log_{\sqrt{3}} 2 < \log_3 5 < \frac{3}{2}$

よって，これらを小さい方から順に並べると，

$\log_{\sqrt{3}} 2$ 、 $\log_3 5$ ， $\frac{3}{2}$ ・・・(答)

(2)

（ｉ）

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\left(\because \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x\right)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

を与式に代入し，整理すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$$

ここで，

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\cos 2x = \sin(2x+\alpha)$ とおくと，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin 2x\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2x$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\alpha = -\frac{1}{2}$$

$\therefore \alpha = 2n\pi - \dfrac{\pi}{6}$ （n は整数）

三角関数の周期性より解 x を求めるにあたり，n を任意にとってよい。

そこで，$n=0$ とすると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ より，

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{6} \le 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{23}{4}\pi\right) \quad \left(\because 0 \le x < 2\pi\right)$$

$$\therefore 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi,\ \frac{17}{6}\pi$$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ ・・・(答)

補足 1

一般角 $\alpha = 2n\pi - \dfrac{\pi}{6}$ （n は整数）で解くと，

$$\sin\left(2x + 2n\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \left(2n\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2x + 2n\pi - \frac{\pi}{6} < 4\pi + 2n\pi - \frac{\pi}{6}\right) \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

より，

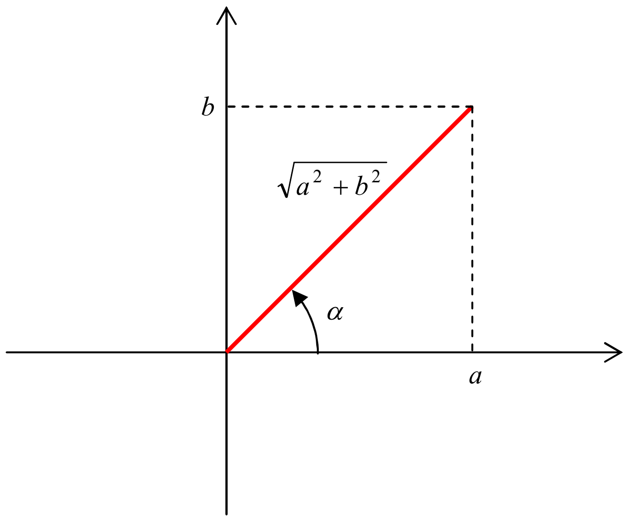
$$2x + 2n\pi - \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{\pi}{6},\quad 2n\pi + \frac{5}{6}\pi,\quad 2n\pi + \frac{13}{6}\pi,\quad 2n\pi + \frac{17}{6}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{7}{6}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi \qquad ・・・(答)$$

補足 2

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$



（ⅱ）

与式の不等式の解と $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{6}\leq 2x-\frac{\pi}{6}<4\pi-\frac{\pi}{6}\right)$ の解は一致するから，

後者の解をグラフを利用して求める。

$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ $\left(-\frac{\pi}{6}\leq 2x-\frac{\pi}{6}<4\pi-\frac{\pi}{6}\right)$ をわかりやすいグラフにする目的で，

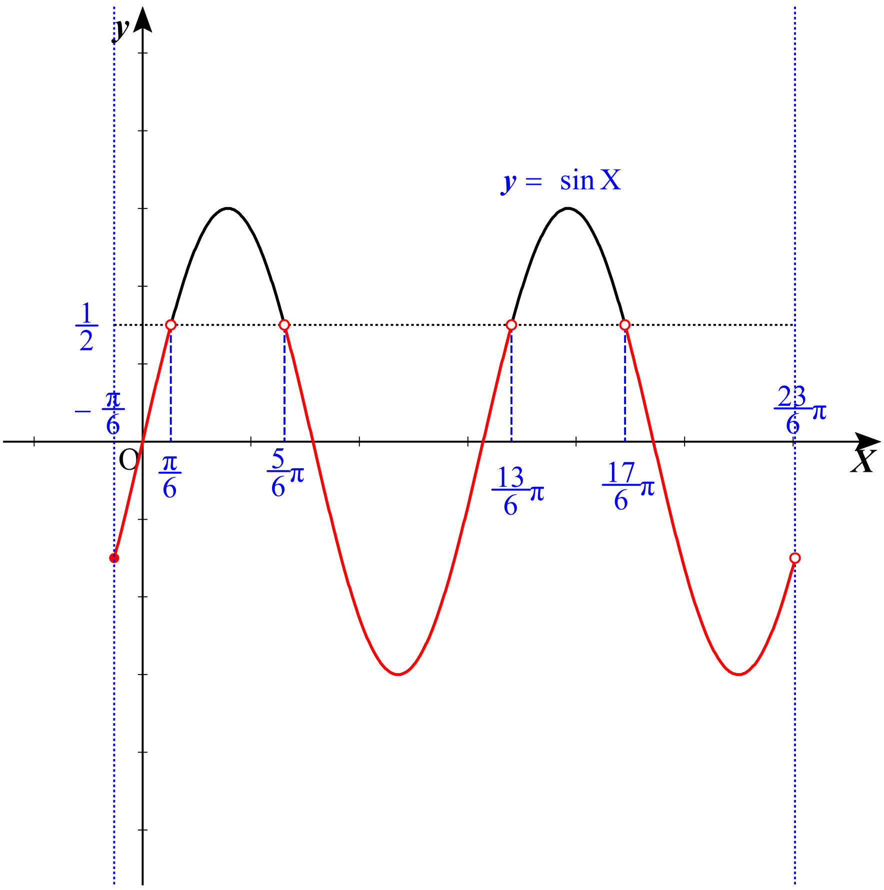
$X=2x-\frac{\pi}{6}$ とおいて，$y=\sin X$ $\left(-\frac{\pi}{6}\leq X<4\pi-\frac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかき，

$y<\frac{1}{2}$ を満たす X の範囲を求めると，

$-\frac{\pi}{6}\leq X<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi<X<\frac{13}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<X<4\pi-\frac{\pi}{6}$

よって，$-\frac{\pi}{6}\leq 2x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi\leq 2x-\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi$，$\frac{17}{6}\pi\leq 2x-\frac{\pi}{6}<4\pi-\frac{\pi}{6}$

$\therefore 0\leq x<\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}<x<\frac{7}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ ・・・(答)



$\boxed{2}$

(1)

$$与式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\quad\cdot\cdot\cdot(答)$$

数列用語

級数

数列の和のこと　例：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$

無限級数

数列を無限に加えていったときの極限　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$

等比数列の和の公式とその導き方

等比数列 $a_n=ar^{n-1}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n=\frac{a_1-a_{n+1}}{1-r}$$

あるいは

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

導き方 1：階差数列を利用

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{ar^{k-1}(r-1)}{r-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{ar^k-ar^{k-1}}{r-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{r-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k+1}}{1-r}\\&=\frac{1}{1-r}\{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1})\}\\&=\frac{a_1-a_{n+1}}{1-r}\end{aligned}$$

導き方 **2**：級数（数列の和）を利用

$$S_n - rS_n = \left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}\right) - \left(ar + ar^2 + ar^3 \cdots + ar^{n-1} + ar^n\right)$$
$$= a - ar^n$$
$$= a_1 - a_{n+1}$$

$$\therefore (1-r)S_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

(2)

$X_n = x_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ とおくと，

$$X_{n+1} = 2pX_n$$
$$= 2p \cdot (2pX_{n-1})$$
$$= 2p \cdot \{2p(2pX_{n-2})\}$$
$$= \cdots = (2p)^n X_1$$

$$\therefore X_n = (2p)^{n-1} X_1$$

$$\therefore x_n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = (2p)^{n-1}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= (2p)^{n-1} \cdot p$$
$$= \frac{1}{2}(2p)^n$$

$\therefore x_n = \frac{1}{2}(2p)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ・・・(答)

$n \to \infty \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ だから，

$n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{2}(2p)^n \to 0$ が成り立てばよい。

よって，$|2p| < 1$ より，$|p| < \frac{1}{2}$

ゆえに，$-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$ ・・・(答)

(3)

数列$(x_n)^2$の第n部分和をS_nとおくと，$(x_n)^2 = S_{n+1} - S_n$

ここで，$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2 = \alpha$（$\alpha$は実数）とすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2 = \lim_{n\to\infty}S_n = \alpha$$

よって，$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to\infty}S_{n+1} - \lim_{n\to\infty}S_n = \alpha - \alpha = 0$

これと，$\lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n)^2$より，$\lim_{n\to\infty}(x_n)^2 = 0$

$\lim_{n\to\infty}(x_n)^2 = \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \lim_{n\to\infty}x_n$より，$\lim_{n\to\infty}x_n = 0$

このとき，(2)より，$-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$

よって，

数列$(x_n)^2$が収束するならば，$-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$　・・・①

つまり，$-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$は，

数列$(x_n)^2$が収束するために少なくとも満たさなければならない条件（必要条件）である。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2 = \sum_{n=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(2p)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}(4p^2)^n + \sum_{n=1}^{\infty}p^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}(4p^2)^n$が収束するためには，$4p^2 < 1$より，$-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$　・・・②

よって，

①，②より，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}(4p^2)^n$が収束するための必要十分条件は，$-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$　・・・③

$\sum_{n=1}^{\infty}p^n$が収束するためには，$|p| < 1$より，$-1 < p < 1$　・・・④

よって，

①，④より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ が収束するための必要十分条件は，$-\dfrac{1}{2} < p < \dfrac{1}{2}$ ・・・⑤

また，(1)より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ は $\dfrac{1}{3}$ に収束する。

ゆえに，③，⑤より，p のとり得る値の範囲は，$-\dfrac{1}{2} < p < \dfrac{1}{2}$ である。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2 &= \sum_{n=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(2p)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(4p^2\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} p^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{1}{4}\cdot 4p^2 - \frac{1}{4}\left(4p^2\right)^{n+1}}{1-4p^2}\right\} + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p-p^{n+1}}{1-p}\right) + \frac{1}{3} \\
&= \frac{p^2 - \frac{1}{4}\times 0}{1-4p^2} + \frac{p-0}{1-p} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{p^2}{\left(1-4p^2\right)} + \frac{p}{1-p} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{p^2(1-p) + p\left(1-4p^2\right)}{\left(1-4p^2\right)(1-p)} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{-p\left(5p^2-p-1\right)}{\left(1-4p^2\right)(1-p)} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_n)^2 = \frac{1}{3}$ より，

$$\frac{-p\left(5p^2-p-1\right)}{\left(1-4p^2\right)(1-p)} = 0 \quad \left(-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore p\left(5p^2-p-1\right) = 0 \quad \left(-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore p = 0,\ \frac{1-\sqrt{21}}{10}$$ ・・・(答)

3

(1)

円 C の式を平方完成し整理すると，$(x+1)^2+(y-1)^2=4$

この式は，点 (x,y) と定点 $(-1,1)$ の距離が常に 2 であることを示している。

よって，C の中心$(-1,1)$，円の半径 2 ・・・(答)

(2)

$y=f(x)=kx-2k+1=k(x-2)+1$ より，

$y=f(2)=1$

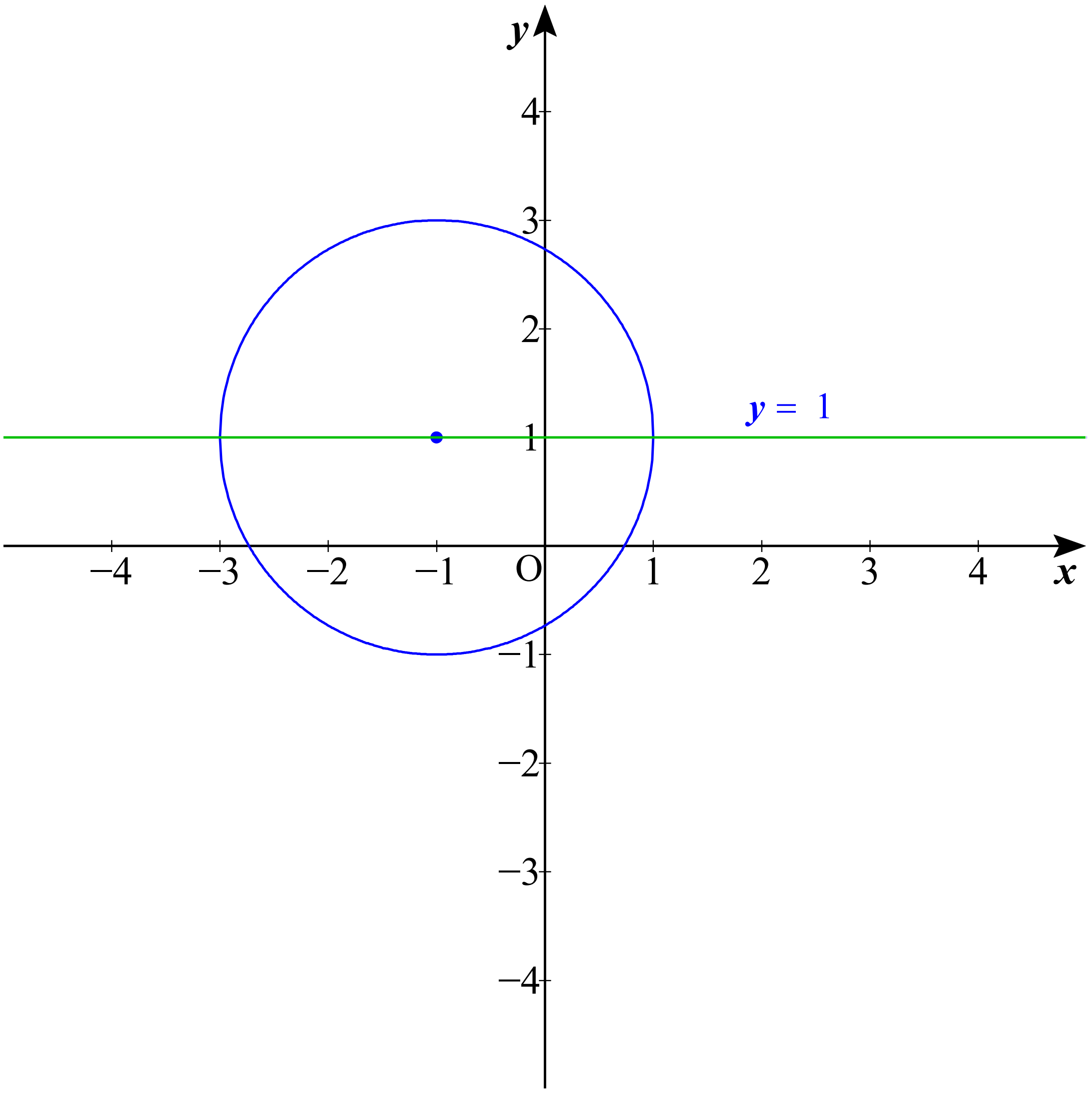
よって，$(2,1)$ ・・・(答)

(3)

$k=0$ のとき

$y=|f(x)|=1$

このとき，下図より，共有点を 2 つもつので，不適である。



よって，

$k \neq 0$ の場合で考える。

グラフをかくにあたり，まず絶対値をはずし，より具体的な 1 次関数を得る必要がある。

手順 1

絶対値の定義より，

$y = |kx-2k+1|$ は，$y = kx-2k+1$ と $y=0$ の間の長さ（距離）を表している。

距離は大きさだから正である。

よって，

$kx-2k+1 \geq 0 \Rightarrow |kx-2k+1| = kx-2k+1$

$kx-2k+1 < 0 \Rightarrow |kx-2k+1| = -(kx-2k+1)$

手順 2

つぎに，

$kx-2k+1 \geq 0$ および $kx-2k+1<0$ となる条件について調べる。

$kx-2k+1 \geq 0$ となるとき

$kx \geq 2k-1$ より，

$k>0$ のとき $x \geq 2-\dfrac{1}{k}$，$k<0$ のとき $x \leq 2-\dfrac{1}{k}$

$kx-2k+1<0$ のとき

$kx < 2k-1$ より，

$k>0$ のとき $x < 2-\dfrac{1}{k}$，$k<0$ のとき $x > 2-\dfrac{1}{k}$

まとめ

$k>0$，$x \geq 2-\dfrac{1}{k}$ のとき，$y = kx-2k+1$ ・・・①

・傾き $k>0$ より，右上がりの直線

・ $k>0$ より，定義域 x の最小値 $= 2-\dfrac{1}{k} < 2$

$k>0$，$x < 2-\dfrac{1}{k}$ のとき，$y = -(kx-2k+1)$ ・・・②

・傾き $-k<0$ より，右下がりの直線

・ $-k<0$ より，定義域 x の最大値 $= 2-\dfrac{1}{k} < 2$

$k<0$，$x > 2-\dfrac{1}{k}$ のとき，$y = -(kx-2k+1)$ ・・・③

・傾き $-k>0$ より，右上がりの直線

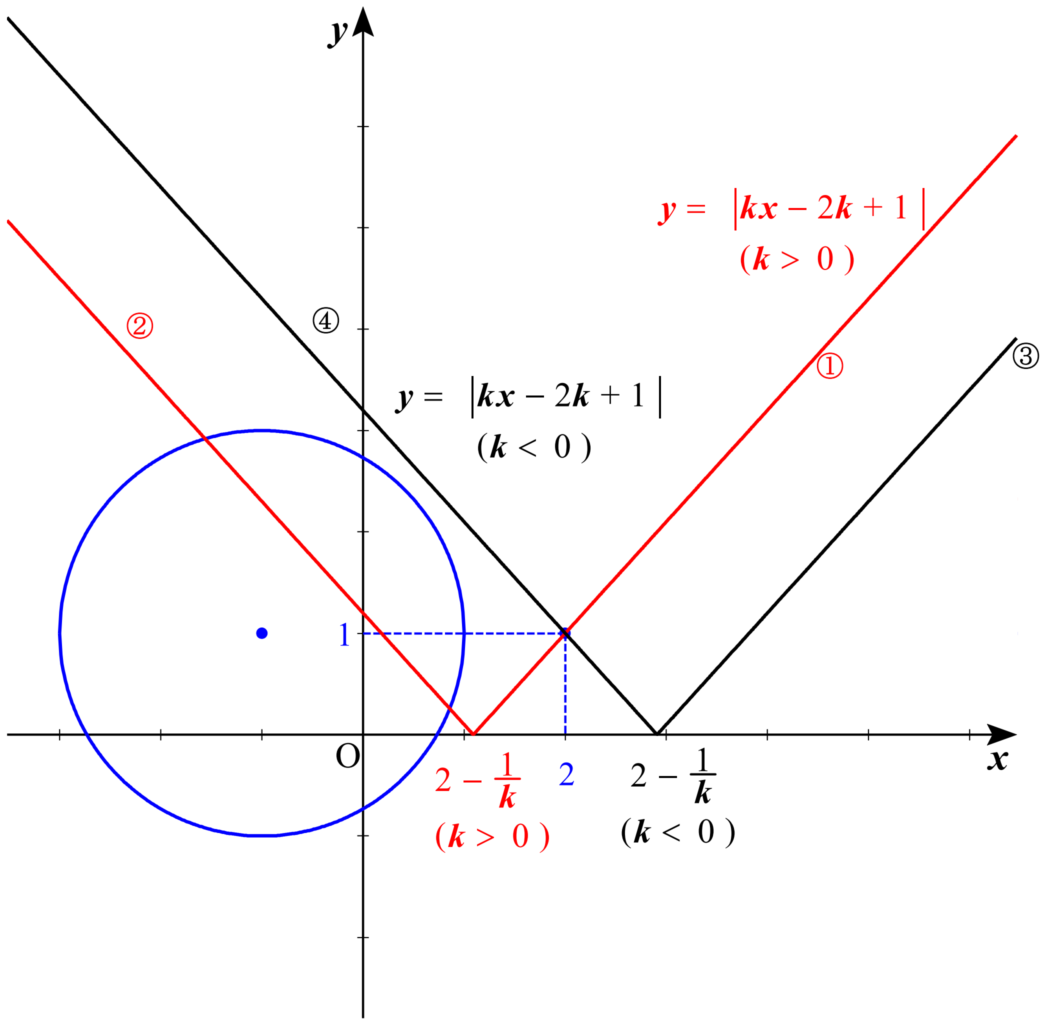
・$-k>0$ より，定義域 x の最小値 $=2-\dfrac{1}{k}>2$

$k<0$，$x\leq 2-\dfrac{1}{k}$ のとき，$y=kx-2k+1$ ・・・④

・傾き $k<0$ より，右下がりの直線

・$k<0$ より，定義域 x の最大値 $=2-\dfrac{1}{k}>2$

以上より，円 C および直線①～④をグラフで表すと，



円 C と $y=|f(x)|$ がただ 1 つの共有点をもつ場合とは，C と $y=|f(x)|$ が接する場合である。
そこで，①～④の直線のうち，どの直線がこの条件を満たしているのかを検討する。

・$y=|f(x)|$ が折れる点 $\left(2-\dfrac{1}{k},0\right)$ の $2-\dfrac{1}{k}$ の値は，$k>0$ のとき $2-\dfrac{1}{k}<2$，$k<0$ のとき $2-\dfrac{1}{k}>2$

・$y=|f(x)|$ は定点（2，1）を必ず通る。

これらのことから，
円 C と接することができる直線は，②と④であることがわかる。
また，円 C の中心$(-1，1)$と接点の距離，すなわち円 C の半径は，
円 C の中心と接線の距離と等しいから，その距離は 2 である。

（ⅰ）②の場合

$kx+y-2k+1=0$ より，

$$\frac{|-k+1-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$$

$$\frac{|-3k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$$

$$|-3k+2|=2\sqrt{k^2+1}$$

$$9k^2-12k+4=4k^2+4 \quad \therefore k(5k-12)=0$$

$k>0$ より，$k=\dfrac{12}{5}$

（ⅱ）④の場合

$kx-y-2k+1=0$ より，

$$\frac{|-k-1-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$$

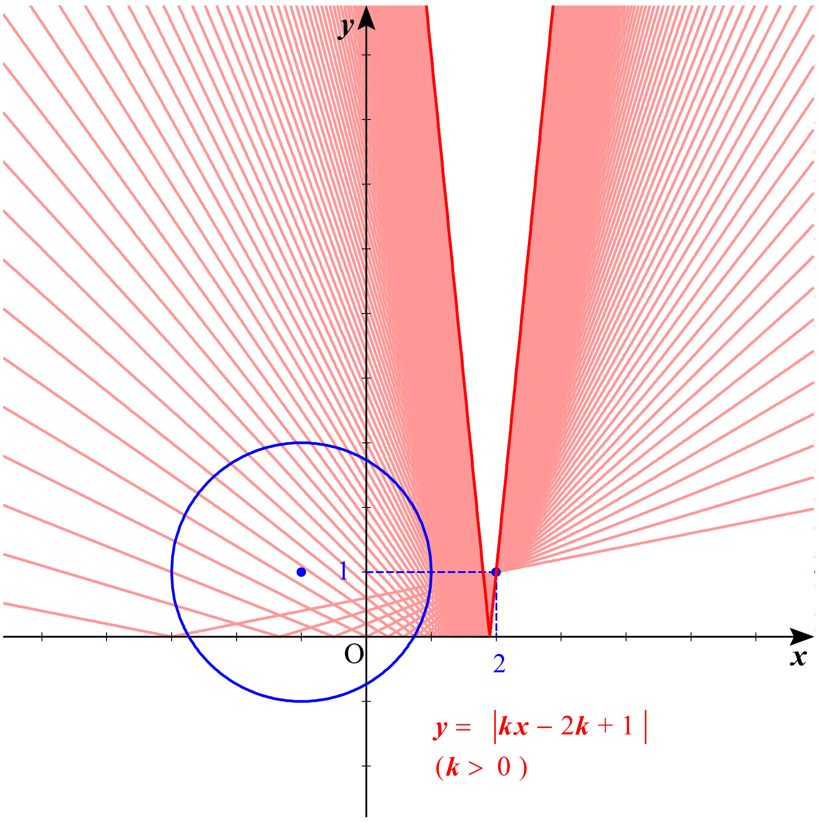
$$\frac{|-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$$

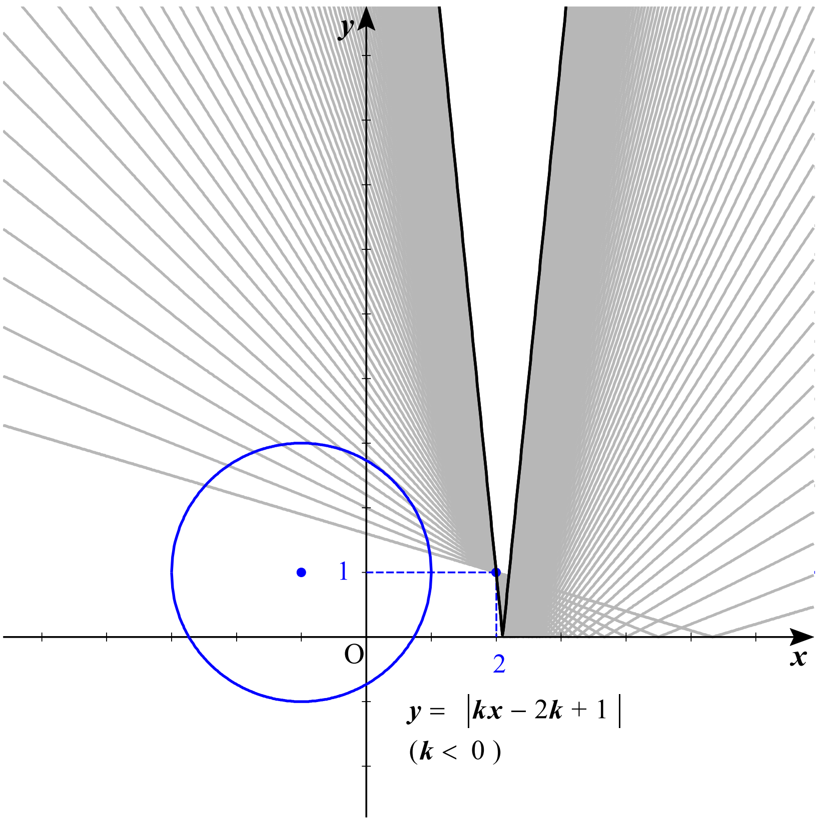
$$|-3k|=2\sqrt{k^2+1}$$

$$9k^2=4k^2+4 \quad \therefore k^2=\frac{4}{5}$$

$k<0$ より，$k=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

（ⅰ），（ⅱ）より，$k=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{12}{5}$


y
1
O
2
x
$y = |kx - 2k + 1|$
$(k > 0)$


y
1
O
2
x
$y = |kx - 2k + 1|$
$(k < 0)$

4

白球を W，赤球を R，青球を B と表すことにする。

***X*＝0 となる確率**

W，R，R，B，B の場合の確率で，

たとえば，WRRBB の順に取り出される確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ である。

このような取り出し方，すなわち W，R，R，B，B の順列は全部で $\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$ 通りあるから，

$X=0$ となる確率は，$30\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{10}{81}$

***X*＝1 となる確率**

W または R または B が残る確率である。

W が残る場合の確率

R，R，B，B が出た後，3 または 4 または 5 または 6 の目が出る場合である。

たとえば, RRBB の順で出た後 3 または 4 または 5 または 6 の目が出る確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}$

このような取り出し方，すなわち R，R，B，B の順列は全部で $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ 通りあるから，

その確率は，$6\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}=\frac{4}{81}$

R が残る場合の確率

W，R，B，B が出た後，1 または 2 または 5 または 6 の目が出る場合である。

たとえば, WRBB の順で出た後 1 または 2 または 5 または 6 の目が出る確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}$

このような取り出し方，すなわち W，R，B，B の順列は全部で $\frac{4!}{2!}=12$ 通りあるから，

その確率は，$12\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

B が残る場合の確率

R が残る場合と同じだから，その確率は，$12\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

よって，

$X=1$ となる確率は，$\frac{4}{81}+\frac{8}{81}+\frac{8}{81}=\frac{20}{81}$

X＝2 となる確率

W と R または W と B または R と R または B と B または R と B が残る確率である。

W と R が残る場合の確率

R，B，B が出た後 5 または 6 の目が出る場合である。

たとえば，RBB の順で出た後 5 または 6 の目が出る確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}$

このような取り出し方，すなわち R，B，B の順列は全部で 3 通りあるから，

その確率は，$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{81}$

W と B が残る場合の確率

W と R が残る場合と同じだから，

その確率は，$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{81}$

R と R が残る場合の確率

W，B，B が出た後 1 または 2 または 5 または 6 の目が出る場合である。

たとえば, WBB の順で出た後 1 または 2 または 5 または 6 の目が出る確率は, $\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}$

このような取り出し方，すなわち W，B，B の順列は全部で 3 通りあるから，

その確率は，$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{6}{81}$

B と B が残る場合の確率

R と R が残る確率と同じだから，

その確率は，$3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{6}{81}$

R と B が残る場合の確率

W，R，B が出た後 1 または 2 の目が出る場合である。

たとえば，WRB の順で出た後 1 または 2 の目が出る確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}$

このような取り出し方，すなわち W，R，B の順列は全部で 6 通りあるから，

その確率は，$6\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{6}{81}$

よって，

$X=2$ となる確率は，$\frac{3}{81}+\frac{3}{81}+\frac{6}{81}+\frac{6}{81}+\frac{6}{81}=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$

X＝3 となる確率

W と R または W と B または R と R または B と B が出て終わる確率である。

W と R が出て終わる場合の確率

W，R が出た後 1 または 2 が出る場合である。

たとえば，WR の順で出た後 1 または 2 の目が出る確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$

このような取り出し方，すなわち W，R の順列は全部で 2 通りあるから，

その確率は，$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

W と B が出て終わる場合の確率

W と R が出て終わる場合の確率と同じだから，

その確率は，$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

R と R が出て終わる場合の確率

RR が出た後 3 または 4 の目が出る確率だから，

その確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

B と B が出て終わる場合の確率

R と R が出て終わる場合の確率と同じだから，

その確率は，$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

よって，

$X=3$ となる確率は，$\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

X＝4 となる確率

W が出て終わる確率である。

W が出た後 1 または 2 の目がでる場合だから，

その確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

最後に，全体の確率が 1 になることを確かめてみよう。

$$\frac{10}{81}+\frac{20}{81}+\frac{8}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{10+20+24+18+9}{81}=\frac{81}{81}=1$$

以上より，

(1)

$X=4$ となる確率は$\dfrac{1}{9}$， $X=0$ となる確率は$\dfrac{10}{81}$

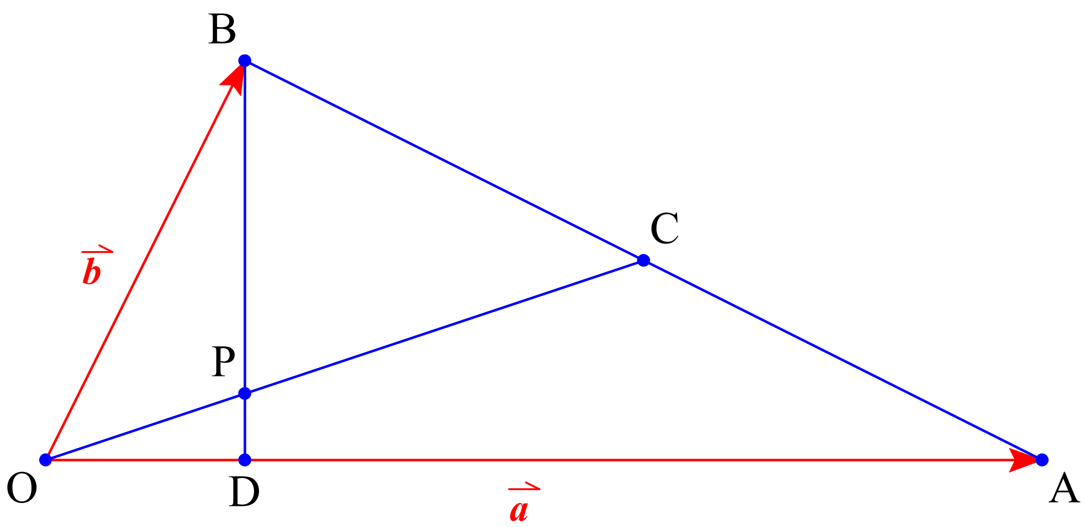
(2)

$X=3$ となる確率は$\dfrac{2}{9}$

(3)

$$E(X)=\frac{0\times 10+1\times 20+2\times 24+3\times 18+4\times 9}{81}=\frac{158}{81}$$

$\boxed{5}$



与えられた条件から得られる情報

三角形 OAB の辺の長さから

$OB^2 + AB^2 = OA^2$ の三平方の定理が成り立つから，

・三角形 OAB は，AB を斜辺とする直角三角形である。

・$\angle OBA = 90^\circ$ の直角三角形である。

三角形 OBD について

$$OD = \frac{1}{1+4} OA = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

三角形 OAB と三角形 OBD の関係について

$OA : OB = \sqrt{5} : 1$，$OB : OD = 1 : \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} : 1$，$\angle O$ を共有より，

$\triangle OAB \backsim \triangle OBD$

三角形 OAC と点 D，B，P について

メネラウスの定理より，$\dfrac{OD}{DA} \cdot \dfrac{AB}{BC} \cdot \dfrac{CP}{PO} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{CP}{PO} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{CP}{PO} = 1$

$\therefore CP : PO = 2 : 1$

よって，点 P は OC を 1 : 2 に内分する点である。

三角形 ABD と点 C，P，O について

メネラウスの定理より，$\dfrac{AC}{CB} \cdot \dfrac{BP}{PD} \cdot \dfrac{DO}{OA} = \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{BP}{PD} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{BP}{PD} \cdot \dfrac{1}{5} = 1$

よって，点 P は BD を 5 : 1 に内分する点である。

(1)

条件より，

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$　・・・(答)

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{1+4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{5}\vec{a}$　・・・(答)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値について

解法 1

三角形 OAB について，余弦定理より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{5}$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ より，

$4=5+1-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

解法 2

三角形 OAB について，$\mathrm{OB}^2+\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2$ の三平方の定理が成り立つから，

三角形 OAB は∠OBA＝90° の直角三角形である。

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$

ゆえに，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}\right)=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=1$

(2)

三角形 OAC と点 D，B，P について

メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PO}}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PO}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PO}}=1$

∴CP：PO＝2：1

よって，点 P は OC を 1：2 に内分する点である。

ゆえに，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{6}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$， $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$， $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+4\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2\vec{q}-\vec{a}-\vec{b}+4\vec{r}$$

$\therefore\ \ 2\vec{q}-\vec{a}-\vec{b}+4\vec{r}=\vec{0}$

$\therefore\ \vec{q}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-2\vec{r}$

$\vec{c}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ より，

$\vec{q}=\vec{c}-2\vec{r}$

$$\begin{aligned}|\vec{q}|^2&=\left(\vec{c}-2\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{c}-2\vec{r}\right)\\&=|\vec{c}|^2-4\vec{c}\cdot\vec{r}+4|\vec{r}|^2\\&=|\vec{c}|^2-4|\vec{c}||\vec{r}|\cos\angle\mathrm{COR}+4|\vec{r}|^2\end{aligned}$$

ここで，$|\vec{c}|$ と $|\vec{r}|$ を求める。

$|\vec{c}|$ について

(1)の解法 2 より $\angle\mathrm{OBC}=90°$， 点 C は AB の中点だから $\mathrm{BC}=1$

よって，$\triangle\mathrm{OBC}$ は $\mathrm{OB}=\mathrm{BC}=1$ の直角二等辺三角形であり，OC はその斜辺だから，

$|\vec{c}|=\sqrt{2}$

$|\vec{r}|$ について

(2)より点 P は OC を 1 : 2 に内分する点だから，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\dfrac{1}{3}|\vec{c}|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=|\vec{r}|$ より，

$|\vec{r}|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

よって，

$$\begin{aligned}|\vec{q}|^2&=|\vec{c}|^2-4|\vec{c}||\vec{r}|\cos\angle\mathrm{COR}+4|\vec{r}|^2\\&=2-\frac{8}{3}\cos\angle\mathrm{COR}+\frac{8}{9}\\&=\frac{26}{9}-\frac{8}{3}\cos\angle\mathrm{COR}\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{q}| = \sqrt{\dfrac{26}{9} - \dfrac{8}{3}\cos\angle\mathrm{COR}}$

よって，$|\vec{q}|$ は $\angle\mathrm{COR} = 180°$ のとき最大値 $\sqrt{\dfrac{26}{9} + \dfrac{8}{3}} = \sqrt{\dfrac{50}{9}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ をとる。

$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_0}\right| = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ ・・・(答)

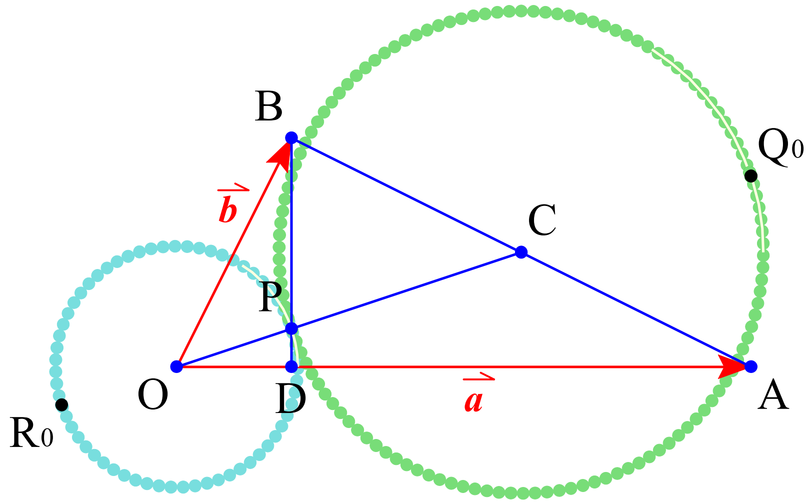
補足 1

点 Q の軌跡について

$\vec{q} = \vec{c} - 2\vec{r}$ より，$\vec{q} - \vec{c} = -2\vec{r}$ $\therefore \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = -2\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

つまり，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は逆向きの平行関係にあり，その大きさは $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の 2 倍である。

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ かつ点 P は OC を 1 : 2 に内分する点より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|$



補足 2

メネラウスの定理とチェバの定理をまとめて覚える方法

三角形 ABC の各辺の内分点あるいは外分点を P，Q，R とし，

下表のように表す。

辺	内分点・外分点	比の取り方
AB	**P**	**AP/PB**
BC	**Q**	**BQ/QC**
CA	**R**	**CR/RA**

すると，メネラウスの定理，チェバの定理とも，

$$\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PB}}\times\frac{\mathbf{BQ}}{\mathbf{QC}}\times\frac{\mathbf{CR}}{\mathbf{RA}}=1$$

と表される。

後は，

外分点の数が偶数（0，2）のときは，「チェバの定理より～」

外分点の数が奇数（1，3）のときは，「メネラウスの定理より～」

とすればよい。

$\boxed{6}$

(1)

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2$$

$$=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\ 9$$

$$=\left\{\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2$$

$$=e^2\quad\cdot\cdot\cdot(答)$$

(2)

(ⅰ)

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{a_1}{1}=0$，$b_{n+1}=b_n+1$ より，

b_n は初項 0，公差 1 の等差数列である。

よって，$b_n=n-1$

ゆえに，$a_n=nb_n=n(n-1)$

(ⅱ)

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n=\left\{\frac{n(n-1)}{n(n+1)}\right\}^n$$

$$=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

$$=\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n$$

$$=\left\{1+\left(-\frac{2}{n+1}\right)\right\}^n$$

ここで，$-\dfrac{1}{n+1}=x$ とおくと，

$$\left\{1+\left(-\frac{2}{n+1}\right)\right\}^n=\frac{\left\{1+\left(-\frac{2}{n+1}\right)\right\}^{n+1}}{1+\left(-\frac{2}{n+1}\right)}$$

$$=\frac{(1+2x)^{-\frac{1}{x}}}{1+2x}=\frac{1}{1+2x}\cdot\frac{1}{(1+2x)^{\frac{1}{x}}}$$

また，$n\to\infty$ のとき，$x\to0$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{1+2x}\cdot\frac{1}{(1+2x)^{\frac{1}{x}}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+2x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$=1\cdot\frac{1}{e^2}$$

$$=\frac{1}{e^2}$$ ・・・(答)

e 関連の極限公式の導き方の流れ

e は主に次の 4 つの形で表現できる。

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

$$\lim_{h\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}=e$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$$

これらは以下に示すように相互変換できる。

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ から始める場合

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\frac{1}{x}=t$ とおく

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

自然対数をとる

$$\log\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e$$

$$\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$\log(1+x)=u$ とおくと，

$1+x=e^{u}$ より，

$x=e^{u}-1$ だから

$$\lim_{u\to o}\frac{u}{e^{u}-1}=1$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u}=1$$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ から始める場合

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\Big\downarrow \ e^x-1=t \text{ とおく}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}=1$$

よって，

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$$

また，

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}\\&=\log\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\end{aligned}$$

左辺 $=1=\log e$ より，

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

$$\Big\downarrow \ \frac{1}{t}=u \text{ とおく}$$

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$$

補足

指数関数 $y=f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ において，

e は次のように定義される。

$y=f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ のうち，

$x=0$ における接線の傾きが 1 であるものを $y=e^x$ とする。

よって，

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x-0}=1$ より，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$\boxed{7}$

(1)

Oを零行列とすると，

$$
\begin{aligned}
BC &= (A-2E)(3E-A)\\
&= 3AE - A^2 - 6E^2 + 2EA\\
&= 3A - A^2 - 6E + 2A\\
&= 5A - 6E - A^2\\
&= 5A - 6E - (5A - 6E)\\
&= O \quad ・・・(答)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CB &= (3E-A)(A-2E)\\
&= 3EA - 6E^2 - A^2 + 2AE\\
&= 3A - 6E - A^2 + 2A\\
&= 5A - 6E - A^2\\
&= 5A - 6E - (5A - 6E)\\
&= O \quad ・・・(答)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^2 - B &= B(B-E)\\
&= (A-2E)(A-3E)\\
&= A^2 - 3AE - 2EA + 6E^2\\
&= A^2 - (5A - 6E)\\
&= 5A - 6E - (5A - 6E)\\
&= O \quad ・・・(答)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^2 - C &= C(C-E)\\
&= (3E-A)(2E-A)\\
&= 6E^2 - 3EA - 2AE + A^2\\
&= A^2 - (5A - 6E)\\
&= 5A - 6E - (5A - 6E)\\
&= O \quad ・・・(答)
\end{aligned}
$$

(2)

与式より，

$p(A-2E)+q(3E-A)=p'(A-2E)+q'(3E-A)$

$\{(p-p')-(q-q')\}A=\{2(p-p')-3(q-q')\}E$

ここで，$p-p'=a$，$q-q'=b$ とおくと，

$(a-b)A=(2a-3b)E$

ここで，$a\neq b$ とすると，

$A=\dfrac{2a-3b}{a-b}E$ となり，すなわち A は E の実数倍となり，仮定に反する。

よって，

$a=b$　・・・①

また，このとき，

左辺は零行列だから，右辺も零行列でなければならない。

よって，

$2a-3b=0$　・・・②

①かつ②より，

$a=b=0$

ゆえに，

$p=p'$，$q=q'$

(3)

与式より，

$A=s(A-2E)+t(3E-A)$

$(s-t-1)A=(2s-3t)E$

ここで，$s-t-1\neq 0$ とすると，

$A=\dfrac{2s-3t}{s-t-1}E$ となり，すなわち A は E の実数倍となり，仮定に反する。

よって，

$s-t-1=0$　・・・③

また，このとき，

左辺は零行列だから，右辺も零行列でなければならない。

よって，

$2s-3t=0$　・・・④

③かつ④より，

$s=3$，$t=2$　・・・(答)

(4)

X^2 について

$X^2 = x^2B^2 + xyBC + xyCB + y^2C^2$

ここで，(1)より，

$B^2 = B$， $C^2 = C$， $BC = CB = O$ だから，

$X^2 = x^2B + y^2C$ ・・・⑤

AX について

(3)より， $A = 3B + 2C$

$AX = (3B + 2C)(xB + yC)$

$= 3xB^2 + 3yBC + 2xCB + 2yC^2$

$= 3xB + 2yC$

$\therefore AX = 3xB + 2yC$ ・・・⑥

A^2 について

$A^2 = (3B + 2C)^2$

$= 9B + 4C$

$\therefore A^2 = 9B + 4C$ ・・・⑦

⑤，⑥，⑦より，

$X^2 - AX - 2A^2 = (x^2B + y^2C) - (3xB + 2yC) - 2(9B + 4C) = O$

$\therefore (x^2 - 3x) + (y^2 - 2y) = 18B + 8C$

(2)より，

$x^2 - 3x = 18$， $y^2 - 2y = 8$

$x^2 - 3x - 18 = (x + 3)(x - 6) = 0$

$y^2 - 2y - 8 = (y + 2)(y - 4) = 0$

よって，

$(x, y) = (-3, -2), (-3, 4), (6, -2), (6, 4)$ ・・・(答)