$x^3-3abx+a^3+b^3$ を ω を含む因数に分解

$x^3-1=0$ すなわち $(x-1)(x^2+x+1)=0$ の 1 と異なる解の 1 つを ω とするとき，

$x^3-3abx+a^3+b^3$ を ω を用いて 3 つの 1 次式の積に因数分解すると，

$\omega^2+\omega+1=0$，　$\omega^3=1$ だから，

$$
\begin{aligned}
x^3-3abx+a^3+b^3 &= x^3+a^3+b^3-3abx \\
&= (x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab) \\
&= (x+a+b)\{x^2-(a+b)x+a^2+b^2-ab\} \\
&= (x+a+b)\left[x^2+\{a(\omega^2+\omega)+b(\omega^2+\omega)\}x+a^2\omega^3+b^2\omega^3+ab(\omega^2+\omega)\right] \\
&= (x+a+b)\left[x^2+(a\omega^2+a\omega+b\omega^2+b\omega)x+a^2\omega^2\cdot\omega+b^2\omega^2\cdot\omega+ab(\omega^2+\omega^4)\right] \\
&= (x+a+b)\left[x^2+(a\omega^2+a\omega+b\omega^2+b\omega)x+(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)\right] \\
&= (x+a+b)\left[x^2+\{(a\omega^2+b\omega)+(b\omega^2+a\omega)\}x+(a\omega^2+b\omega)(b\omega^2+a\omega)\right] \\
&= (x+a+b)(x+a\omega^2+b\omega)(x+b\omega^2+a\omega)
\end{aligned}
$$

補足

$x^3+a^3+b^3-3abx=(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$ の因数分解は

$p^3+q^3+r^3-3pqr=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)$ を利用した。

$-a=a\cdot(-1)=a(\omega^2+\omega)\ \left(\because \omega^2+\omega+1=0 \Leftrightarrow -1=\omega^2+\omega\right)$

$\omega=1\cdot\omega=\omega^3\cdot\omega=\omega^4$