A,A,A,B,C,D,E,F,G,H のグループ分けの場合の数

例題

A,A,A,B,C,D,E,F,G,H の文字が書かれた 10 枚のカードがある。
これらのカードを 2 枚 1 組として 5 つに分ける。
このような分け方は全部で何通りあるか。

例題を解く前に伏線問題を 1 つ

A, B, C, D, E, F, G, H の文字が書かれた 8 枚のカードがある。
これらのカードを 2 枚 1 組として 4 つに分ける。
このような分け方は全部で何通りあるか。

解１：ふつうに解く

4 組の区別はないから，$\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{4!}=105$ 通り

解 2：1 枚のカードを特別扱いして解く

A の組を A 組とし，A 組，残り 3 組の順に組をつくると，
A 組のつくり方の場合の数は 7 通り，
残りの 3 組の区別はないから，$\dfrac{{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{3!}=15$ 通り。
よって，$7\times15=105$ 通り

解 3：2 枚のカードを特別扱いして解く

A の組を A 組，B の組を B 組とする。

ｉ）A と B が同じ組にならない場合
A 組，B 組，残り 2 組の順に組をつくると，
A 組のつくり方の場合の数＝6 通り，B 組のつくり方の場合の数＝5 通り，
残りの 2 組の区別はないから，$\dfrac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!}=3$ 通り
よって，$6\times5\times3=90$ 通り

ⅱ）A と B が同じ組，すなわち AB 組になる場合
AB 組のつくり方は 1 通り，
残り 3 組の区別はないから，$\dfrac{{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{3!}=15$ 通り
よって，$1\times15=15$ 通り

ｉ)，ⅱ）より，90+15＝105 通り

解 4：3 枚のカードを特別扱いして解く

A の組を A 組，B の組を B 組，C の組を C 組とする。

ｉ）A,B,C が同じ組にならない場合

A 組，B 組，C 組，残り 1 組の順に組をつくると，

A 組のつくり方の場合の数＝5 通り，B の組のつくり方の場合の数＝4 通り，

C の組のつくり方の場合の数＝3 通り，残りの 1 組のつくり方の場合の数＝1 通り

よって， $5\times4\times3\times1=60$ 通り

ⅱ）A,B,C の間で 1 組できる場合

A,B,C の間の組のつくり方の場合の数は，AB 組，BC 組，CA 組の 3 通り，

あぶれたカードでの組のつくり方＝5 通り，

残り 2 組の区別はないから， $\dfrac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!}=3$ 通り

よって， $3\times5\times3=45$ 通り

ｉ），ⅱ）より，60+45=105 通り

例題

A,A,A,B,C,D,E,F,G,H の文字が書かれた 10 枚のカードがある。
これらのカードを 2 枚 1 組として 5 つに分ける。
このような分け方は全部で何通りあるか。

解法のポイント

ｉ）A だけの組ができない場合

とりあえず 3 つの A を A_1,A_2,A_3 に分け，A_1 組，A_2 組，A_3 組と区別し，
A_1 組，A_2 組，A_3 組，残り 2 組の順に組をつくると，
A_1 の組のつくり方の場合の数＝7 通り，A_2 の組のつくり方の場合の数＝6 通り，
A_3 の組のつくり方の場合の数＝5 通り，残り 2 組の区別はないから，$\dfrac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{2!}=3$ 通り

よって，$7\times6\times5\times3=630$ 通り

続いて，A_1,A_2,A_3 の区別を解消する。
たとえば，（A_1B,A_2C,A_3D），（A_1B,A_2D,A_3C），（A_1C,A_2B,A_3D），（A_1C,A_2D,A_3B），（A_1D,A_2B,A_3C），（A_1D,A_2C,A_3B）の 6 組はすべて（AB,AC,AD）の 1 組になってしまう。
つまり，区別を解消すると，場合の数が A_1,A_2,A_3 の順列分の 1，すなわち $\dfrac{1}{3!}$ になる。

よって，$630\times\dfrac{1}{3!}=105$ 通り

ⅱ）A だけの組ができる場合

A だけの組のつくり方の場合の数＝1 通り，
残りは A,B,C,D,E,F,G,H で組をつくるから $\dfrac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{4!}=105$ 通り

$1\times105=105$ 通り

ｉ），ⅱ）より 110+110＝220 通り