

ABC 予想とフェルマーの最終定理**abc-triple**

自然数の組 (a, b, c) が $a + b = c$, $a < b$, a と b は互いに素を満たすとき,

この自然数の組 (a, b, c) を *abc-triple* とよぶ。

また, ある自然数 X を素因数分解したときの素因数の積を $\text{rad}(X)$ と表すことにする。

たとえば,

$$\text{rad}(6) = \text{rad}(2 \cdot 3) = 6$$

$$\text{rad}(16) = \text{rad}(8) = \text{rad}(4) = \text{rad}(2) = 2$$

$$\text{rad}(17) = 17$$

$$\text{rad}(18) = \text{rad}(2 \cdot 3^2) = \text{rad}(2 \cdot 3) = 6$$

すると,

$\text{rad}(a \cdot b \cdot c) < c$ を満たす *abc-triple* は無限個あり,

たとえば, $(a, b, c) = (1, 3^{2^n} - 1, 3^{2^n})$ はこれを満たす。(証明は後述)

ABC 予想

abc-triple (a, b, c) のすべてが $c < \{\text{rad}(abc)\}^2$ を満たすという予想

ABC 予想とフェルマーの最終定理**フェルマーの最終定理**

n を自然数とすると, $x^n + y^n = z^n$ は $n \geq 3$ のとき, 自然数解 (x, y, z) をもたない。

ABC 予想が成り立つとした上でのフェルマーの最終定理の証明

$n \geq 3$ のとき, $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数解 (x, y, z) が存在すると仮定し,

x と y の最大公約数を g とすると, $x = x'g$, $y = y'g$ (x' と y' は互いに素) より,

$$x^n + y^n = g^n(x'^n + y'^n) = z^n \text{ となるから, } z \text{ も } g^n \text{ で割り切れる。}$$

よって, この仮定を, $n \geq 3$ のとき, $p^n + q^n = r^n$ を満たす自然数解 (p, q, r) ,

($p < q$, p と q は互いに素) が存在するとしてよい。

すると, (p^n, q^n, r^n) について, $p^n < q^n$, p^n と q^n は互いに素が成り立つから,

(p^n, q^n, r^n) は *abc-triple* である。

$$\text{よって, } r^n < \{\text{rad}(p^n q^n r^n)\}^2 = \{\text{rad}(pqr)\}^2 \leq (pqr)^2 < (r^3)^2 = r^6$$

ゆえに, n が 3 以上 5 以下の自然数のとき,

$x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数解 (x, y, z) が存在する。

ところが, $n = 3, 4, 5$ のとき $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数解 (x, y, z) が存在しないことが,

それぞれオイラー ($n = 3$ のとき, 1753 年), フェルマー ($n = 4$ のとき, 1640 年),

ディリクレとルジャンド ($n = 5$ のとき, 1825 年) により証明されている。

よって, $n \geq 3$ のとき, $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数解 (x, y, z) は存在しない。

$(a, b, c) = (1, 3^{2^n} - 1, 3^{2^n})$ が $\text{rad}(abc) < c$ を満たすことの証明

$$\begin{aligned}
 b &= 3^{2^n} - 1 \\
 &= 3^{2 \cdot 2^{n-1}} - 1 \\
 &= \left(3^{2^{n-1}}\right)^2 - 1 \\
 &= \left(3^{2^{n-1}} + 1\right) \left(3^{2^{n-1}} - 1\right) \\
 &= \left(3^{2^{n-1}} + 1\right) \left(3^{2^{n-2}} + 1\right) \left(3^{2^{n-2}} - 1\right) \\
 &= \left(3^{2^{n-1}} + 1\right) \left(3^{2^{n-2}} + 1\right) \left(3^{2^{n-3}} + 1\right) \left(3^{2^{n-3}} - 1\right) \\
 &\quad \vdots \\
 &= \left(3^{2^{n-1}} + 1\right) \left(3^{2^{n-2}} + 1\right) \left(3^{2^{n-3}} + 1\right) \cdots \left(3^{2^k} + 1\right) \cdots \left(3^{2^0} + 1\right) \left(3^{2^0} - 1\right)
 \end{aligned}$$

ここで $3^{2^k} + 1$ ($0 \leq k \leq n-1$) は n 個あり、いずれも偶数であることと、
 $3^{2^0} + 1 = 3^1 + 1 = 4 = 2^2$ であることから、

$\left(3^{2^{n-1}} + 1\right) \left(3^{2^{n-2}} + 1\right) \left(3^{2^{n-3}} + 1\right) \cdots \left(3^{2^k} + 1\right) \cdots \left(3^{2^0} + 1\right) \left(3^{2^0} - 1\right)$ は 2^{n+1} で割り切れる。

これと $3^{2^0} - 1 = 3^1 - 1 = 2$ より、 $b = 3^{2^n} - 1$ は 2^{n+2} で割り切れる。

よって、

$$\begin{aligned}
 \text{rad}(abc) &= \text{rad}\left(1 \cdot \left(3^{2^n} - 1\right) \cdot 3^{2^n}\right) \\
 &= \text{rad}\left(2^{n+2} \cdot \frac{3^{2^n} - 1}{2^{n+2}} \cdot 3^{2^n}\right) \\
 &= \text{rad}\left(2 \cdot \frac{3^{2^n} - 1}{2^{n+2}} \cdot 3\right) \\
 &\leq \frac{3}{2^{n+1}} \left(3^{2^n} - 1\right) \\
 &= \frac{3}{2^{n+1}} (c - 1) \\
 &< \frac{3}{2^{n+1}} c \\
 &\leq \frac{3}{4} c \\
 &< c
 \end{aligned}$$

フェルマー予想と ABC 予想

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~ytakao/papers/abc.pdf>

を読んで自分なりに理解しました。