固有値・固有ベクトルと行列の対角化

固有値

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc\neq 0)$において,

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\neq\vec{0}\right)$を満たす実数$k$と列ベクトル$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$存在するとき,

kを行列Aの固有値,列ベクトル$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$を$A$の固有ベクトルという。

要するに,固有ベクトルとは,行列Aによる一次変換でk倍されるベクトルである。

1.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の固有値$k$は$k^2-(a+d)\cdot k+ad-bc=0$の解である。

証明

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の固有ベクトルを$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\neq\vec{0}\right)$とすると,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=kE\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\vec{0}$$

$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}^{-1}$が存在すると仮定すると,

$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}^{-1}\vec{0}$より,

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\vec{0}$となり,$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$であることに反する。

よって,

$\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}^{-1}$は存在しない。

すなわち

$$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix}=(a-k)(d-k)-bc=k^2-(a+d)k+ad-bc=0$$

また,このことは,$k=A$としても成り立つことがわかっており,

このとき,

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$　　(ケーリー・ハミルトンの定理)

が成り立つ。

2.

行列Aが固有値$\alpha,\beta\ (\alpha\neq\beta)$をもつとき

固有値α,βと対応する互いに独立な固有ベクトルをそれぞれ$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$とする。

このとき，$P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$

$\therefore P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}\alpha^n&0\\0&\beta^n\end{pmatrix}$

$\therefore A^n=P\begin{pmatrix}\alpha^n&0\\0&\beta^n\end{pmatrix}P^{-1}$

証明

$A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$を以下のように変形していく。

$A\begin{pmatrix}x_1&0\\y_1&0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1&0\\y_1&0\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}0&x_2\\0&y_2\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}0&x_2\\0&y_2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}x_1&0\\y_1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1&0\\\alpha y_1&0\end{pmatrix}$　・・・①

$A\begin{pmatrix}0&x_2\\0&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\beta x_2\\0&\beta y_2\end{pmatrix}$　・・・②

①＋②より，

$A\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1&\beta x_2\\\alpha y_1&\beta y_2\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$

$\therefore AP=P\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$

ここで，

$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$は互いに独立だから，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\neq k\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$，

すなわち$\dfrac{x_1}{x_2}\neq\dfrac{x_2}{y_2}$より，$x_1y_2-x_2y_1\neq0$

よって，$P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$は逆行列をもつ。

$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$

$$\therefore \left(P^{-1}AP\right)^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n$$

$$\therefore \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right) = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore PP^{-1}A^nPP^{-1} = P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\therefore A^n = P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

例題

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。 A^n を求めよ。

解

あるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$ が, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ （k は実数）を満たすとする。

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = kE\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-k & -2 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ より $\begin{pmatrix} 4-k & -2 \\ 1 & 1-k \end{pmatrix}$ は逆行列をもたない。

よって, $\begin{vmatrix} 4-k & -2 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = (4-k)(1-k) + 2 = k^2 - 5k + 6 = 0 \qquad \therefore k = 2,3$

$k = 2$ のとき

$\begin{pmatrix} 4-2 & -2 \\ 1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ より, $x - y = 0$

よって, $x = y$ ならば, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が成り立つ。

そこで, 方程式 $x = y$ を満たす特殊解を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり,

これを変形し,

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 0 \\ 2\cdot 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ・・・①$$

とする。

$k=3$ のとき

$\begin{pmatrix} 4-3 & -2 \\ 1 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ より，$x-2y=0$

よって，$x=2y$ ならば，$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が成り立つ。

そこで，方程式 $x-2y=0$ を満たす特殊解を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，

これを変形し，

$$A\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3\cdot 2 \\ 0 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} \quad ・・・②$$

とする。

①＋②より，

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 2\cdot 1 & 3\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}A^n\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -2^n+2\cdot 3^n & 2^{n+1}-2\cdot 3^n \\ -2^n+3^n & 2^{n+1}-3^n \end{pmatrix}$$