ヘルダーの不等式とミンコウスキーの不等式

問題

(1) $p>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$a\geq 0$，$b\geq 0$ ならば $ab\leq \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$ となることを証明せよ。

(2) $p>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ とする。$f(x), g(x)$ が区間 $[\alpha,\beta]$ で連続ならば

$$\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$ が成り立つことを証明せよ。

尚，$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で $f(x)\geq 0$ のとき，$\int_b^a f(x)dx=0$ ならば $f(x)$ は常に 0 であることを用いてよい。（最後ページで証明）

(3) (2)の不等式を利用して，

$p\geq 1$ のとき，

$$\left(\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ が成り立つことを証明せよ。

補足

(1)の不等式は「ヘルダーの不等式」とよばれ，(2)の不等式はその積分形である。
特に， $p=q=2$ の場合，コーシー・シュワルツの不等式（積分形）という。

つまり， $\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ より，

$\left\{\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|dx\right\}^2 \le \int_\alpha^\beta |f(x)|^2 dx \cdot \int_\alpha^\beta |g(x)|^2 dx$ （コーシー・シュワルツの不等式（積分形））

また，(3)の不等式は「ミンコウスキーの不等式」とよばれる。
尚，コーシー・シュワルツの不等式（積分形）だけなら，次のように簡単に証明できる。

（ｉ） $f(x)$ または $g(x)$ が積分区間で常に 0 のとき等号が成り立つ。

（ⅱ） $f(x)$ と $g(x)$ のいずれも積分区間で常に 0 ではないとき

$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = A$ ， $\int_a^b \{g(x)\}^2 dx = B$ ， $\int_a^b f(x)g(x)dx = C$ とおくと，

任意の実数 t に対して，

$$\begin{aligned}\int_a^b \{tf(x)+g(x)\}^2 dx &= t^2\int_a^b \{f(x)\}^2 dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \\ &= At^2 + 2Ct + B \ge 0\end{aligned}$$

かつ $A>0$ より，

判別式を D とすると， $\frac{D}{4} = C^2 - AB \le 0 \quad \therefore AB \ge C^2$

よって， $\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \cdot \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \ge \left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2$

（ｉ），（ⅱ）より， $\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \cdot \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \ge \left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2$ が成り立つ。

【解答／解説】

(1)

適当な関数をつくり，増減を調べて解けばよい。

解法 1 というか，適当な関数例その **1**

$a=0$ または $b=0$ のとき

$$ab=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}=0$$

$a>0$ かつ $b>0$ のとき

$$\frac{\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}}{ab}=\frac{1}{p}\cdot\frac{a^{p-1}}{b}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b^{q-1}}{a}$$

ここで， $x=\dfrac{a^{p-1}}{b}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{b^{q-1}}{a}&=\frac{\left(\dfrac{a^{p-1}}{x}\right)^{q-1}}{a}\\&=\frac{b^{(p-1)(q-1)}}{ax^{q-1}}\\&=\frac{a^{pq-(p+q)+1}}{ax^{q-1}}\\&=\frac{a}{ax^{q-1}}\\&=\frac{1}{x^{q-1}}\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ より， $\dfrac{p+q}{pq}=1$ $\quad\therefore pq=p+q$

よって， $\dfrac{\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}}{ab}=\dfrac{x}{p}+\dfrac{1}{qx^{q-1}}$

さらに， $f(x)=\dfrac{x}{p}+\dfrac{1}{qx^{q-1}}$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{p}+\frac{1-q}{q}\frac{1}{x^q}\\&=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{1}{x^q}\\&=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{x^q}\\&=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{x^q}\right)\end{aligned}$$

これと $x=\dfrac{a^{p-1}}{b}>0$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\downarrow$	$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$	$\uparrow$

これと $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ より，$f(x)=\dfrac{\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}}{ab}\geq 1$

以上より，$ab\leq\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$ （証明終）

解法 2 というか，適当な関数例その 2

$a=0$ または $b=0$ のとき

$$ab=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}=0$$

$a>0$ かつ $b>0$ のとき

$$\frac{\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}}{ab}=\frac{1}{p}\cdot\frac{a^{p-1}}{b}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b^{q-1}}{a} \quad ・・・①$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ より，　$p+q=pq \quad \therefore q(p-1)=p,\ p(q-1)=q$

$$\therefore p-1=\frac{p}{q},\quad q-1=\frac{q}{p} \quad ・・・②$$

①，②より，

$$\frac{\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}}{ab}=\frac{1}{p}\cdot\frac{a^{\frac{p}{q}}}{b}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b^{\frac{q}{p}}}{a}$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}\right)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{b^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{q}}}\right)^q$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}\right)^p+\frac{1}{q}\frac{1}{\left(\frac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}\right)^q}$$

ここで，関数 $f(x)$ を $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{1}{qx^q}\ (x>0)$ と定義すると，

$$f'(x)=x^{p-1}-\frac{1}{x^{q+1}}$$
$$=x^{p-1}\left(1-\frac{1}{x^{p+q}}\right)$$

より，増減表は次のようになる。

x	0		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↓	$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$	↑

これと $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ より，$f(x)\geq 1\ (x>0)$

よって，$\dfrac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}>0$ より，$\dfrac{\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}}{ab}=f\left(\left(\dfrac{a^{\frac{1}{q}}}{b^{\frac{1}{p}}}\right)^p\right)\geq 1$

ゆえに，$ab\leq \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$

補足

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を活かすことにより，いろいろな関数をつくることができる。

(2)

$\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx = 0$ または $\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx = 0$ のとき

条件より，$|f(x)|^p$ は常に 0 または $|g(x)|^q$ は常に 0 だから，

$f(x)$ は常に 0 または $g(x)$ は常に 0 である。

よって，$\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|dx = \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = 0$

$\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx > 0$ かつ $\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx > 0$ のとき

(1)の $p > 1$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$a \geq 0$，$b \geq 0$ ならば $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ において，

$\frac{|f(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} > 0$，$\frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} > 0$ より，

$a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}$，$b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$ とすると，

$$\frac{|f(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \left\{\frac{|f(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}\right\}^p + \frac{1}{q} \cdot \left\{\frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}\right\}^q$$

$$= \frac{|f(x)|^p}{p \cdot \int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q \cdot \int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx}$$

よって，$\frac{|f(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \cdot \int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q \cdot \int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx}$ が示された。

次に，この不等式の両辺を $[\alpha, \beta]$ で積分すると，

$$\int_\alpha^\beta \frac{|f(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} dx \leq \int_\alpha^\beta \left\{\frac{|f(x)|^p}{p \cdot \int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q \cdot \int_\alpha^\beta |g(x)|^q dx}\right\} dx$$

が成り立つ。

左辺について，

分母の$\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$と$\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$は定積分値，つまり定数であるから，

$$\int_\alpha^\beta \frac{|f(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{|g(x)|}{\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}\,dx=\frac{\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|dx}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}$$

右辺について，

分母の$\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx$と$\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx$は定積分値，つまり定数であるから，

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\left\{\frac{|f(x)|^p}{p\cdot\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx}+\frac{|g(x)|^q}{q\cdot\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx}\right\}dx&=\frac{\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx}{p\cdot\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx}+\frac{\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx}{q\cdot\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx}\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\\&=1\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|dx}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}\leq 1$

ゆえに，$\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|dx\leq\left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$

(3)

$p=1$ のとき

$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$ より， $\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)dx|\le\int_\alpha^\beta|f(x)dx|+\int_\alpha^\beta|g(x)|dx$

$p>1$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)|^p&=|f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\\&\le\{|f(x)|+|g(x)|\}|f(x)+g(x)|^{p-1}\\&=|f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}\\&=\left|f(x)\cdot(f(x)+g(x))^{p-1}\right|+\left|g(x)\cdot(f(x)+g(x))^{p-1}\right|\end{aligned}$$

$$\therefore\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)|^p\,dx\le\int_\alpha^\beta\left|f(x)\cdot(f(x)+g(x))^{p-1}\right|dx+\int_\alpha^\beta\left|g(x)\cdot(f(x)+g(x))^{p-1}\right|dx$$

ここで，右辺の 2 つの項それぞれについて(2)の不等式を適用する。

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす q を導入すると，

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\left|f(x)\cdot(f(x)+g(x))^{p-1}\right|dx&\le\left(\int_\alpha^\beta|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta\left|(f(x)+g(x))^{p-1}\right|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\int_\alpha^\beta|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)|^{pq-q}\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_\alpha^\beta|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

同様に， $\int_\alpha^\beta\left|g(x)\cdot(f(x)+g(x))^{p-1}\right|dx\le\left(\int_\alpha^\beta|g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}$

よって，

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)|^p\,dx\\&\le\left(\int_\alpha^\beta|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}+\left(\int_\alpha^\beta|g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_\alpha^\beta|f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{\left(\int_\alpha^\beta|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_\alpha^\beta|g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p}{\left(\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}} dx \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\therefore \left(\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

以上より，

$$\left(\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$f(x)$が$[a,b]$で連続で$f(x)\geq 0$のとき，$\int_b^a f(x)dx=0$ならば$f(x)$は常に0であることの証明

$f(x_0)>0$となる点$(x_0, f(x_0))$が存在すると仮定すると，
$f(x)$は$[a,b]$で連続だから，
以下を満たすある適当な正数δが存在する。

$a\leq x\leq b$において，$|x-x_0|\leq\delta$ならば$|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{f(x_0)}{2}$

つまり，$a\leq x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta\leq b$において，$\dfrac{f(x_0)}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{3}{2}f(x_0)$が成り立つ。

よって，

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx \\
&\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \\
&\geq \frac{f(x_0)}{2}\{(x_0+\delta)-(x_0-\delta)\} \\
&= \delta\cdot f(x_0)>0
\end{aligned}
$$

これは，$f(x)$が$[a,b]$で連続で$f(x)\geq 0$のとき，$\int_b^a f(x)dx=0$とした条件に反する。

ゆえに，$f(x)$が$[a,b]$で連続で$f(x)\geq 0$のとき，$\int_b^a f(x)dx=0$ならば$f(x)$は常に0である。