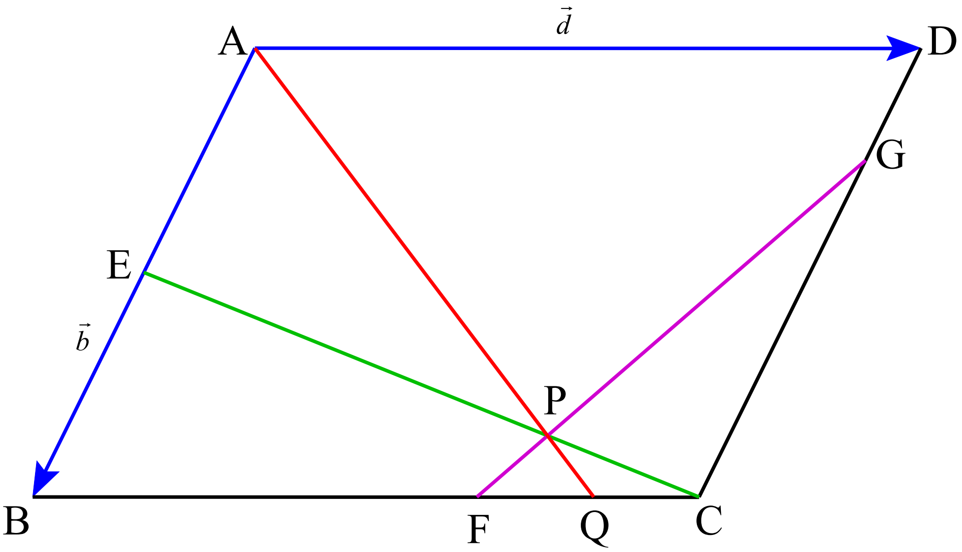
ベクトルを用いた解法とメネラウスの定理を用いた解法の比較

問題

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E，辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ。

（2013 京大 文理共通）

ベクトルを用いた解法



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると，

条件より， $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}$

よって，EP：PC＝s ：$1-s$， FP：PG＝t ：$1-t$ （s, t は実数）とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は,

$$(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AE}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-s)\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+s\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\frac{1+s}{2}\vec{b}+s\vec{d}$$

または

$$(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(1-t)\left(\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+t\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\frac{4-3t}{4}\vec{b}+\frac{2+t}{3}\vec{d}$$

と表される。

これと $\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立であることから， $\dfrac{1+s}{2}=\dfrac{4-3t}{4}$ かつ $s=\dfrac{2+t}{3}$

これを解くと， $s=\dfrac{8}{11}$, $t=\dfrac{2}{11}$

よって， $s=\dfrac{8}{11}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1+s}{2}\vec{b}+s\vec{d}$ に代入することにより， $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{19}{22}\vec{b}+\dfrac{8}{11}\vec{d}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ （k は実数）とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{19k}{22}\vec{b}+\dfrac{8k}{11}\vec{d}$　　・・・①

また，Q は直線 BC 上の点だから，

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+u\vec{d}$ （u は実数）　　・・・②

とも表せる。

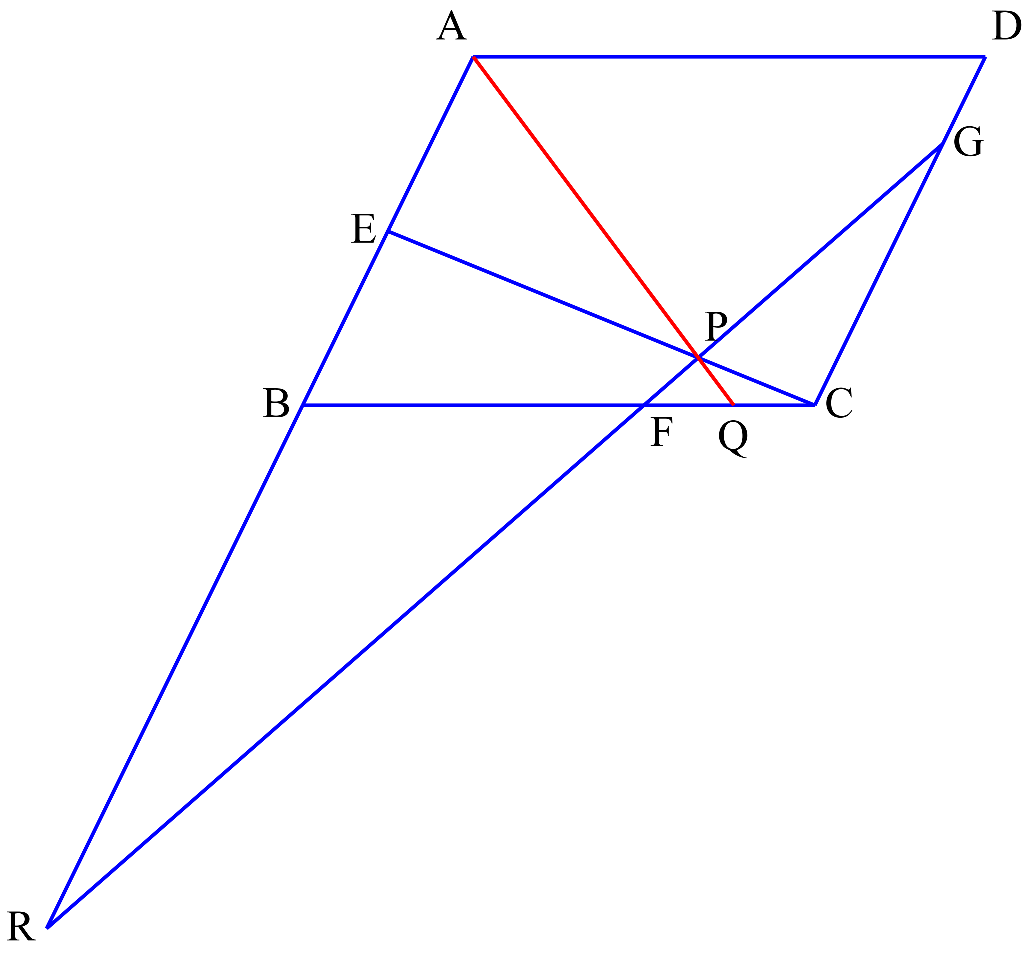
①，②より， $\dfrac{19k}{22}=1,\ \dfrac{8k}{11}=u$

これを解くと， $k=\dfrac{22}{19},\ u=\dfrac{16}{19}$

よって， $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{22}{19}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

ゆえに，AP：PQ＝19：3

メネラウスの定理を用いた解法



△ABQ と線分 EC について

メネラウスの定理より，$\dfrac{EB}{AE}\cdot\dfrac{CQ}{BC}\cdot\dfrac{PA}{QP}=1$

ここで，条件より $\dfrac{EB}{AE}=1$ だから，$\dfrac{CQ}{BQ}\cdot\dfrac{PA}{QP}=1$　$\therefore \dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{BC}{QC}$　・・・①

△EBC と線分 AQ について

メネラウスの定理より，$\dfrac{AB}{EA}\cdot\dfrac{QC}{BQ}\cdot\dfrac{PE}{CP}=1$

ここで，条件より $\dfrac{AB}{EA}=2$ だから，$\dfrac{QC}{BQ}\cdot\dfrac{PE}{CP}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore \dfrac{BQ}{QC}=2\cdot\dfrac{PE}{CP}$　・・・②

直線 AB と直線 GF の交点を R とすると，
△EBC と線分 PR について

メネラウスの定理より，$\dfrac{RB}{ER}\cdot\dfrac{FC}{BF}\cdot\dfrac{PE}{CP}=1$ ・・・③

ここで，

条件より，$\dfrac{FC}{BF}=\dfrac{1}{2}$ ・・・④

△GFC∽△RFB（証明略）で，$\dfrac{RB}{GC}=\dfrac{FB}{FC}=2$

また，条件より，$\dfrac{GC}{EB}=\dfrac{3}{2}$

よって，$\dfrac{RB}{EB}=\dfrac{RB}{GC}\cdot\dfrac{GC}{EB}=3$ $\therefore\dfrac{RB}{ER}=\dfrac{3}{4}$ ・・・⑤

④と⑤を③に代入すると，$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{PE}{CP}=1$ すなわち $\dfrac{PE}{CP}=\dfrac{8}{3}$

これと②より，$\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{16}{3}$ すなわち $\dfrac{BC}{QC}=\dfrac{19}{3}$

ゆえに，①より，$\dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{19}{3}$ すなわち AP：PQ＝19：3

三角形 ABC の辺を AB，BC，CA と表し，
それぞれの辺の内分点・外分点を P，Q，R とすると，
比の取り方は下表となる。

辺	内分点・外分点	比の取り方
AB	**P**	**AP/PB**
BC	**Q**	**BQ/QC**
CA	**R**	**CR/RA**

すると，メネラウスの定理の式とチェバの定理の式は，

$$\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PB}}\times\frac{\mathbf{BQ}}{\mathbf{QC}}\times\frac{\mathbf{CR}}{\mathbf{RA}}=1$$

と統一できる。
後は，
外分点の数が偶数のときは，「チェバの定理より～」
外分点の数が奇数のときは，「メネラウスの定理より～」
とすればよい。