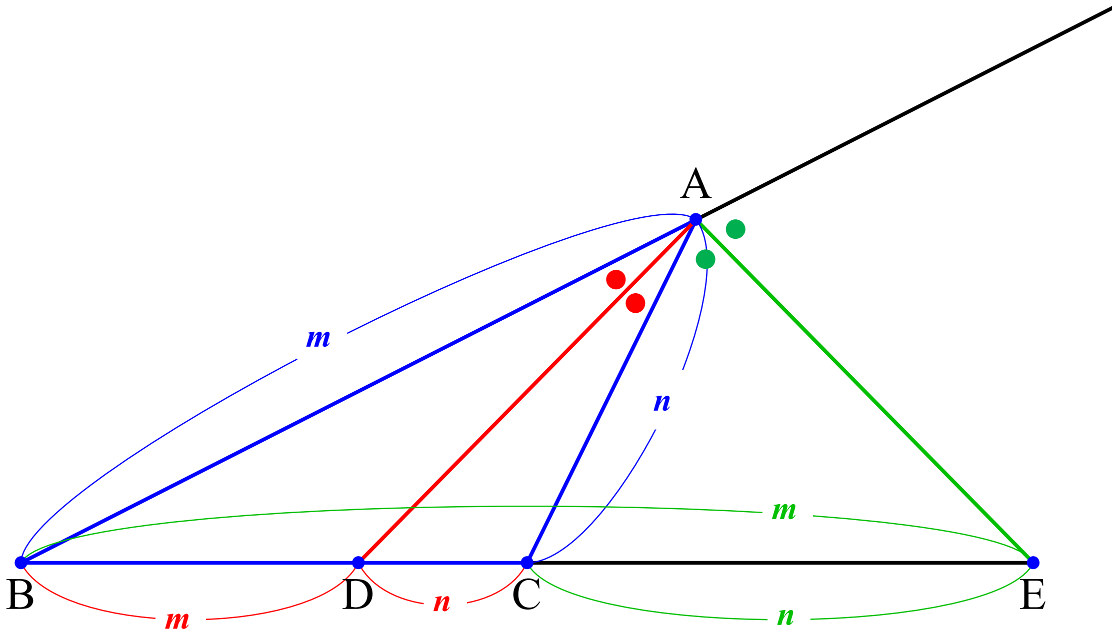
三角形の角の二等分線とアポロニウスの円

三角形の角の二等分線



点 D は三角形 ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点

点 E は直線 BC と∠A の外角の二等分線との交点とする。

このとき，

点 D は線分 BC を AB：AC に内分する点である。

よって，BD：DC＝AB：AC

点 E は線分 BC を AB：AC に外分する点である。

よって，BE：EC＝AB：AC

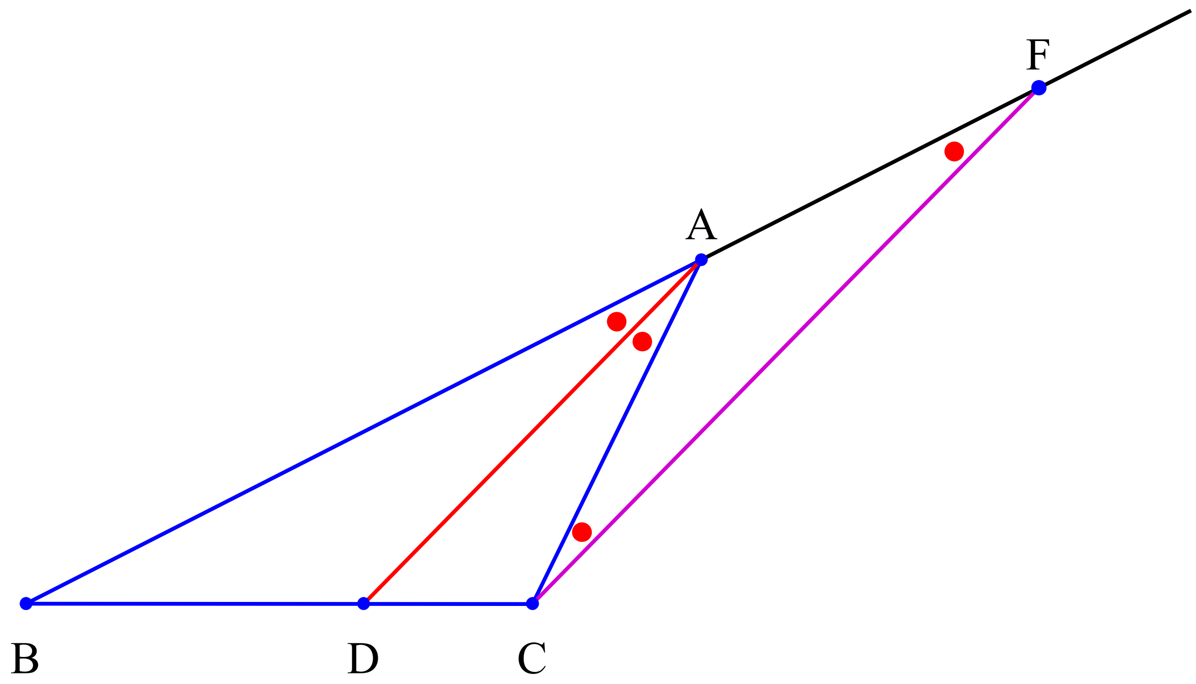
要するに，

内角の二等分線　⇒　AB：AC に内分する点

外角の二等分線　⇒　AB：AC に外分する点

証明

内角の二等分線の場合



半直線 BA と点 C を通り，線分 DA と平行な直線との交点を F とすると，

DA//CF より，

∠BAD＝∠AFC（同位角），∠DAC＝∠ACF（錯角）だから，AC=AF

よって，AB：AC＝AB：AF　・・・①

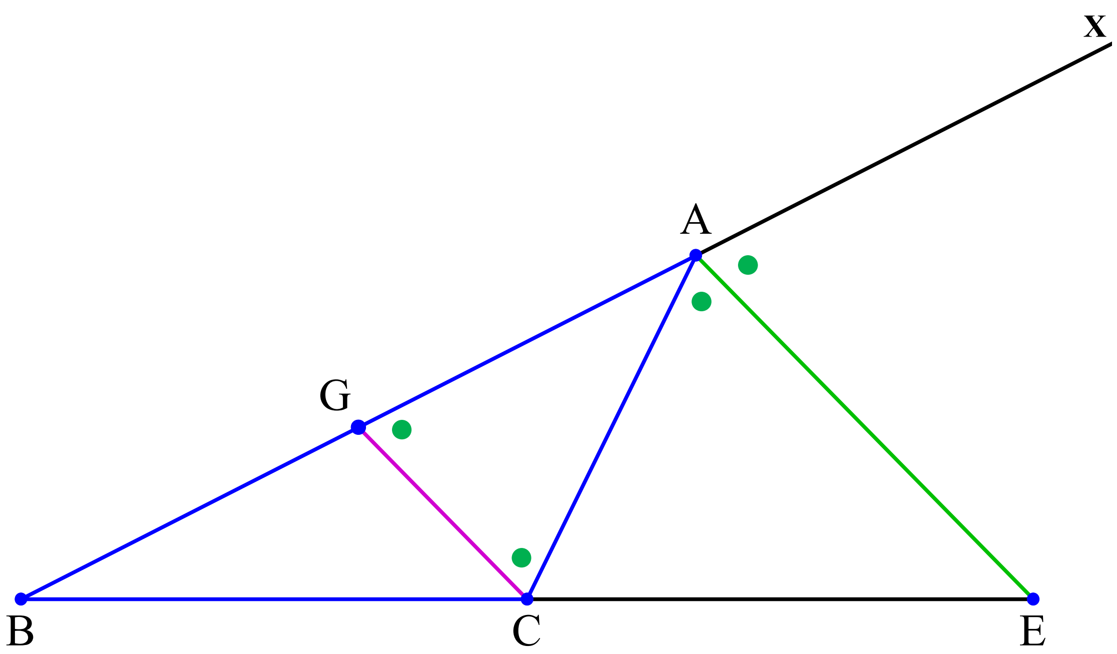
平行線と線分の比より，

AB：AF＝BD：DC　・・・②

①，②より，

AB：AC＝BD：DC

外角の二等分線の場合



点 C を通り AE と平行な直線と線分 AB との交点を G とすると，

AE//GC より，

∠XAE＝∠AGC（同位角），∠EAC＝∠ACG（錯角）だから，AC＝AG

よって，AB：AC＝AB：AG　・・・③

平行線と線分の比より，

AB：AG＝EB：EC　・・・④

③，④より，

AB：AC＝BE：EC

アポロニウスの円

平面上で 2 定点への距離の比が一定の点の軌跡がつくる円をアポロニウスの円という。

たとえば,

2 定点 B，C からの距離の比が $m : n\ (m \neq n)$ である点を A

線分 BC を $m : n$ に内分する点を D,

線分 BC を $m : n$ に外分する点を E

とすると，点 A の軌跡は，線分 DE を直径とする円を描く。

解説

AB：AC＝BD：DC＝$m : n$，AB：AC＝BE：EC＝$m : n$

より，AD は∠A の二等分線，AE は∠A の外角の二等分線である。

よって，∠DAE＝∠DAC＋∠CAE＝90°　（直径の円周角）

ゆえに，A は線分 DE を直径とする円周上の点である。