円の接線の公式

1. 円 $\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$ 上の点 $\boldsymbol{(x_1,\ y_1)}$ における接線の方程式は $\boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2}$

証明

$x^2+y^2=r^2$ の中心を O，円周上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線を l， l 上の A でない任意の点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，三角形 OAP は∠A＝90°，OP を斜辺とする直角三角形だから，

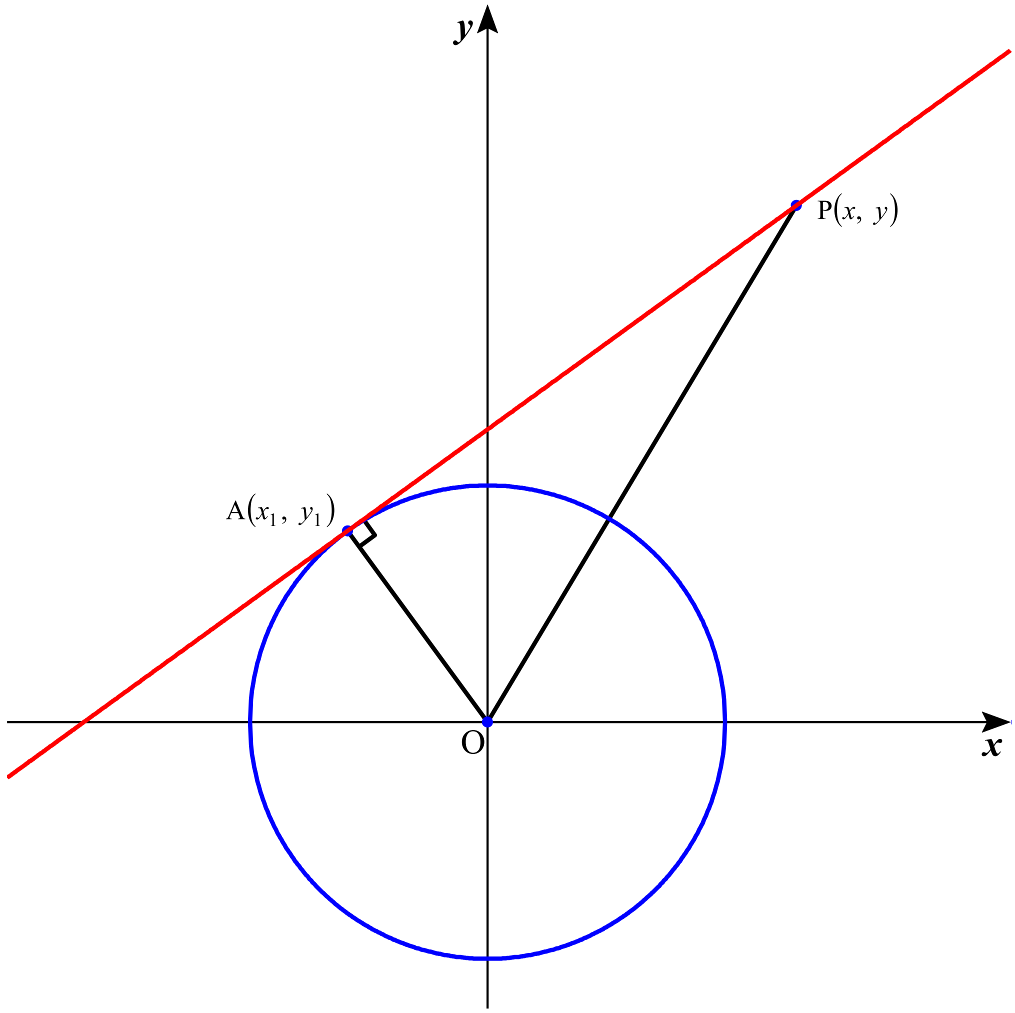
三平方の定理より， $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{AP}^2$

$$
\begin{aligned}
\therefore x^2+y^2 &= \mathrm{OA}^2+(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 \\
&= r^2+x^2-2x_1x+x_1{}^2+y^2-2y_1y+y_1{}^2 \\
&= x^2+y^2+r^2+\left(x_1{}^2+y_1{}^2\right)-2(x_1x+y_1y) \\
&= x^2+y^2+r^2+r^2-2(x_1x+y_1y) \\
&= x^2+y^2+2\left\{r^2-(x_1x+y_1y)\right\}
\end{aligned}
$$

$\therefore x_1x+y_1y=r^2$

これは $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ についても成り立つ。

ゆえに，接線 l の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$



2. 円$\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$上の点$\boldsymbol{(x_1,\ y_1)}$における接線の方程式は

$\boldsymbol{(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2}$

証明

$x^2+y^2=r^2$上の点$(x_1',\ y_1')$における接線の方程式は$x_1'x+y_1'y=r^2$

$x^2+y^2=r^2$上の点をx軸方向にa，y軸方向にb平行移動して点を$(X,\ Y)$すると，

$X=x+a,\ Y=y+b$より，$x=X-a,\ y=Y-b$

これを$x^2+y^2=r^2$に代入することにより，$(X-a)^2+(Y-b)^2=r^2$

$(X,\ Y)$もxy座標平面上の点だから，これを$(x,\ y)$に書き直すことにより，

$x^2+y^2=r^2$をx軸方向にa，y軸方向にb平行移動した円の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　・・・①

$x_1'x+y_1'y=r^2$上の点をx軸方向にa，y軸方向にb平行移動した点を$(X',\ Y')$，

このとき接点$(x_1',\ y_1')$は$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上の点$(x_1,\ y_1)$に移動したとすると，

$X'=x+a,\ Y'=y+b$より，$x=X'-a,\ y=Y'-b$

$x_1=x_1'+a,\ y_1=y_1'+b$より，$x_1'=x_1-a,\ y_1'=y_1-b$

これを$x_1'x+y_1'y=r^2$に代入することにより，$(x_1-a)(X'-a)+(y_1-b)(Y'-b)=r^2$

$(X',\ Y')$を$(x,\ y)$に書き直すことにより，

$x_1'x+y_1'y=r^2$をx軸方向にa，y軸方向にb平行移動した接線の方程式は

$(x_1-a)(x-a)^2+(y_1-b)(y-b)^2=r^2$　・・・②

①，②より，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上の点$(x_1,\ y_1)$における接線の方程式は

$(x_1-a)(x-a)^2+(y_1-b)(y-b)^2=r^2$