ある直線群を接線とする曲線の方程式の求め方

軌跡や領域問題などにおいて，直線の通過領域を知りたいときに

問題 1

直線群 $y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$ を接線とする曲線の方程式を求めよ。

解法 1

手順 1

直線群を接線とする曲線を $y=f(x)$，その曲線上の点を $(x,\ y)=(x(t),\ y(t))$ とすると，

曲線の接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}$ が直線群の傾き $\dfrac{4t-2}{5}$ と等しいことと $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ より，

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{4t-2}{5}\qquad \therefore y'(t)=\frac{4t-2}{5}x'(t)\qquad \cdots ①$$

手順 2

$(x(t),\ y(t))$ は直線群上の点だから， $y(t)=\dfrac{4t-2}{5}x(t)+\dfrac{t^2+2t}{5}\qquad \cdots ②$

②を t で微分すると， $y'(t)=\dfrac{4}{5}x(t)+\dfrac{4t-2}{5}x'(t)+\dfrac{2t+2}{5}\qquad \cdots ③$

手順 3

①を③に代入すると， $\dfrac{4t-2}{5}x'(t)=\dfrac{4}{5}x(t)+\dfrac{4t-2}{5}x'(t)+\dfrac{2t+2}{5}$ より， $\dfrac{4}{5}x(t)+\dfrac{2t+2}{5}=0$

これより， $x(t)=-\dfrac{t+1}{2}\qquad \therefore t=-2x(t)-1\qquad \cdots ④$

手順 4

④を②に代入し，t を消去することにより， $x(t)$ と $y(t)$ の関係式を求めると，

$$\begin{aligned}
y(t)&=\frac{4\{-2x(t)-1\}-2}{5}x(t)+\frac{\{-2x(t)-1\}^2+2\{-2x(t)-1\}}{5}\\
&=\frac{-4x^2(t)-6x(t)-1}{5}\\
&=-\frac{1}{5}\{4x^2(t)+6x(t)+1\}
\end{aligned}$$

よって，直線群を接線とする曲線の方程式は

$$y=-\frac{1}{5}(4x^2+6x+1)=-\frac{4}{5}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}$$

まとめ

直線群 $y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$ を接線とする曲線を媒介変数 t を用いて表すと，

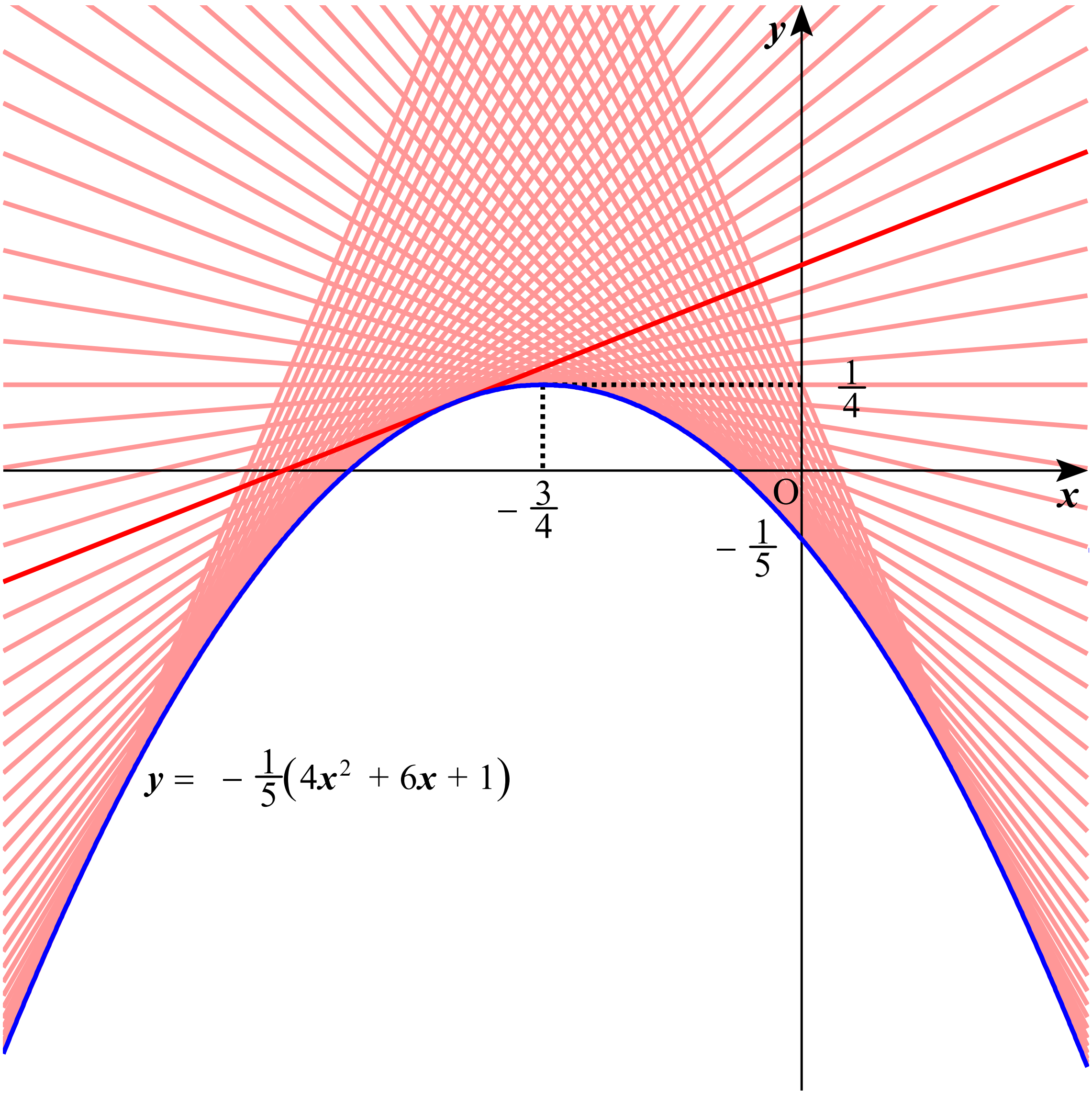
$$(x(t),\ y(t))=\left(-\frac{t+1}{2},\ -\frac{1}{5}\left\{4x^2(t)+6x(t)+1\right\}\right)$$

よって，その曲線を x と y の方程式で表すと， $y=-\dfrac{1}{5}\left(4x^2+6x+1\right)$ となる。

逆に， $y=f(x)=-\dfrac{1}{5}\left(4x^2+6x+1\right)$ とすると，

$y=f(x)$ 上の点 $\left(-\dfrac{t+1}{2},\ f\left(-\dfrac{t+1}{2}\right)\right)$ における接線の方程式は $y=\dfrac{4t-2}{5}x+\dfrac{t^2+2t}{5}$ である。

赤色直線は直線群



曲線の方程式が簡単に求められるタイプの直線群：***x*(*t*)=*t*** タイプ

問題 2

直線群 $y=\left(3t^2-4\right)x-2t^3$ を接線とする曲線の方程式を求めよ。

解法

手順 1

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

すなわち $y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$　・・・①

これが $y=\left(3t^2-4\right)x-2t^3$ と一致すると仮定すると，$f'(t)=3t^2-4$　・・・②

手順 2

②の両辺を t で不定積分すると，$f(t)=t^3-4t+C$ （C は積分定数）　・・・③

手順 3

②と③を①に代入すると，$y=\left(3t^2-4\right)x-t\left(3t^2-4\right)+t^3-4t+C$

すなわち，$y=\left(3t^2-4\right)x-2t^3+C$

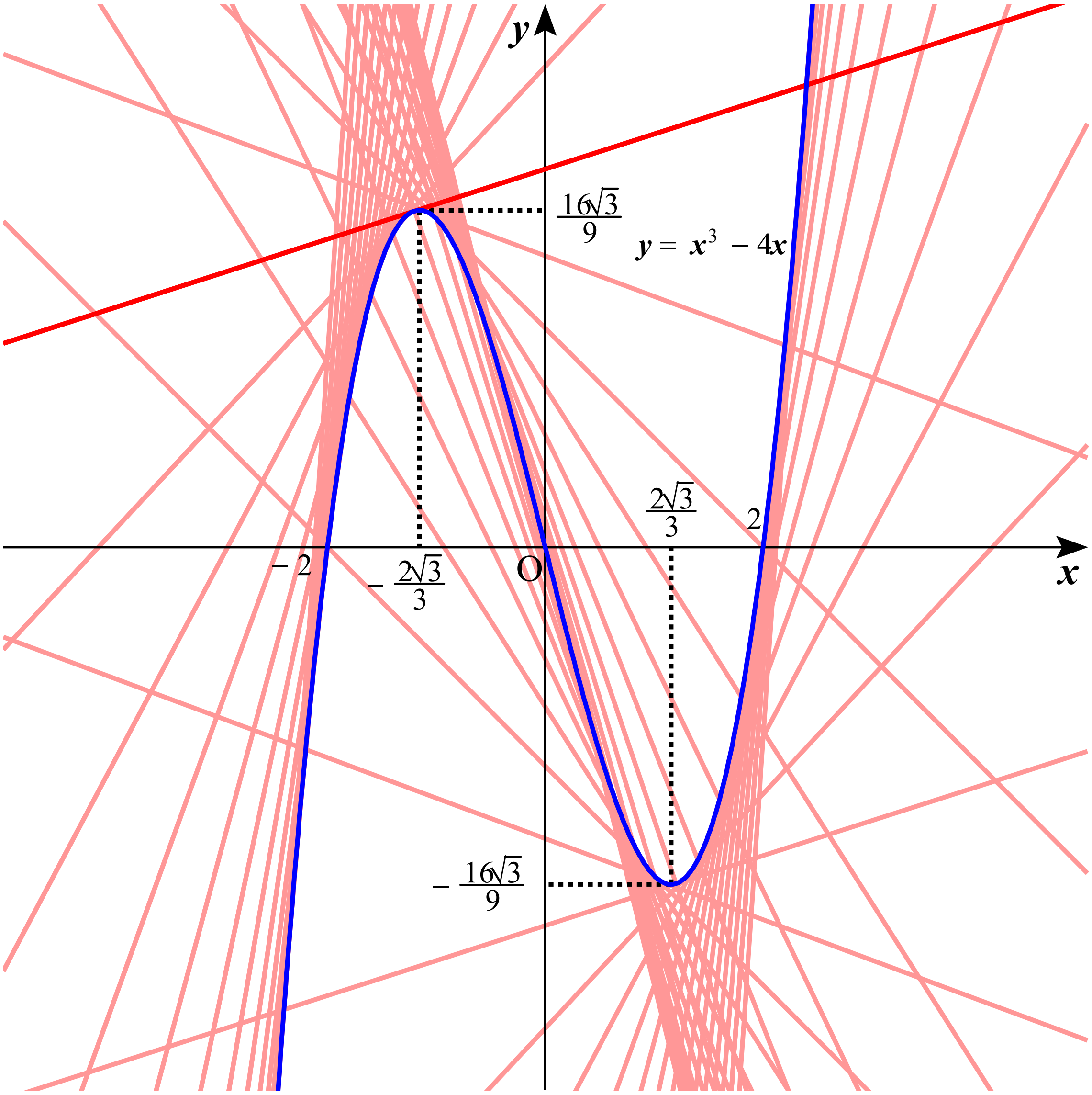
これが $y=\left(3t^2-4\right)x-2t^3$ と一致するから，$C=0$

よって，$f(x)=x^3-4x$

補足

問題 1 のように，$x(t)\neq t$ となる場合は使えない。

この手順で上手くいかない場合は，問題 1 の手順に従って求めればよい。


y
x
O
$\frac{16\sqrt{3}}{9}$
$y = x^3 - 4x$
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
2
-2
$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$