相反方程式とその解き方

相反方程式

整式の方程式を降べきの順あるいは昇べきの順に整理したとき，
係数が左右対称となる方程式
逆数方程式ともいう。

相反方程式の分類

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a\neq 0)$ ・・・①（偶数次の相反方程式）
$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a\neq 0)$ ・・・②（奇数次の相反方程式）
解き方は，方程式が偶数次（①）と奇数次（②）で異なる。

相反方程式の解き方

注意
$x=0$ が相反方程式の解でないことを示してから，
偶数次あるいは奇数次の相反方程式を解く作業に入ること。

1．偶数次の相反方程式（①）の解き方

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

↓ 両辺を $x^2\ (x\neq 0)$ で割る。

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

↓ 係数について整理する。

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

$$a\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

↓ $x+\dfrac{1}{x}=y$ とおき， y についての 2 次方程式にする。

$a\left(y^2-2\right)+by+c=0$
$ay^2+by-2a+c=0$

↓

解 y と $y=x+\dfrac{1}{x}$ から解 x を求める。

2. 奇数次の相反方程式（②）の解き方

解き方のポイント：因数分解し，偶数次の相反方程式をつくる。

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ に $x=-1$ を代入すると，

$-a+b-c+c-b+a=0$ となるから，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ は $x=-1$ を解にもつ。

すなわち，$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ は $x+1$ で割り切れる。

よって，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a\}$

ゆえに，

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ は，

$(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a\}=0$

と変形できる。

よって，

$x=-1$ 以外の解は，

偶数次の相反方程式：$ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+(-a+b)x+a=0$

を解いて求めればよい。

重要

$x+\dfrac{1}{x}$ には，$x>0$ の条件が付けられていることがよくあるので注意しなければならない。

たとえば，

$y=x+\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のとき，$ay^2+by-2a+c$ $(a>0)$ の最小値を求めよ。

といった問題では，

相加平均≧相乗平均より，$y=x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ だから，

$y\geq 2$ の範囲で最小値を求めなければならない。

ともかく，

正の数が出てきたら，条件反射的に「相加平均≧相乗平均」を意識しよう。