$\boldsymbol{a_{n+1}=pa_n+q(n)}$（$\boldsymbol{p}$ は $\mathbf{0}$ でない定数）の一般項を求める方法

はじめに

$f(n+1)=pf(n)+q(n)$ を満たす漸化式はいくらでもつくれる。

つまり，

$a_{n+1}=pa_n+q(n),\quad a_1=\alpha$

もあれば、

$b_{n+1}=pb_n+q(n),\quad b_1=\beta$

もあれば,

$c_{n+1}=pc_n+q(n),\quad c_1=\gamma$

もあれば,

⋮

といくらでもつくれる。

これらの漸化式 1 つ 1 つを $f(n+1)=pf(n)+q(n)$ の特性方程式という。

$\boldsymbol{a_{n+1}=pa_n+q(n),\quad a_1=\alpha}$ を満たす数列 $\boldsymbol{\{a_n\}}$ の一般項を特性方程式を利用して求める方法

$a_{n+1}=pa_n+q(n)$ ・・・①

$f(n+1)=pf(n)+q(n)$ を満たす特性方程式を $b_{n+1}=pb_n+q(n)$ ・・・②とすると,

① − ② より,

$a_{n+1}-b_{n+1}=p(a_n-b_n)$ ・・・③

$\therefore \dfrac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n}=p$

これは，数列 $\{a_n-b_n\}$ が公比 p ，初項 a_1-b_1 の等比数列であることを示している。

よって，$a_n-b_n=p^{n-1}(a_1-b_1)$

ゆえに，$a_n=p^{n-1}(a_1-b_1)+b_n$

要するに,

与式の漸化式とその特性方程式の差をとることにより,

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-b_{n+1}=p(a_n-b_n)$ を得,

それから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるというのが,

特性方程式を利用して数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める方法の原理である。

特性方程式の作り方の原理

③より，$a_{n+1}=pa_n+b_{n+1}-pb_n$

これと $a_{n+1}=pa_n+q(n)$ より,

$q(n)=b_{n+1}-pb_n$

これより，b_n を $q(n)$ と同種の式にすれば楽に特性方程式ができることがわかる。

いろいろな特性方程式

$q(n)=c$ （c は定数）の場合

$b_n=\alpha$ （α は定数）とおく。

すると，漸化式は $\alpha=p\alpha+c$ となり，この方程式を解くことにより，α の値が求まる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+c$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ が得られる。

$q(n)=cn+d$ （n の 1 次式）の場合

$b_n=\alpha n+\beta$ とおくと，漸化式は $\alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+cn+d$ となり，

これが n の恒等式であることから，α と β を求めることができる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+cn+d$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ が得られる。

補足：階差数列を利用して解くことも可能

$a_{n+2}=pa_{n+1}+c(n+1)+d$ と $a_{n+1}=pa_n+cn+d$ の差をとると，

$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+c$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であり，

漸化式 $b_{n+1}=pb_n+c$ から数列 $\{b_n\}$ を求めることにより，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \ (n\geq 2)$

$q(n)=cn^2+dn+e$ （n の 2 次式）の場合

$b_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ とおくと，

漸化式は $\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(\alpha n^2+\beta n+\gamma)+cn^2+dn+e$ となり，

これが n の恒等式であることから，α,β,γ を求めることができる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+cn^2+dn+e$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\left\{\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma\right\}=p\left\{a_n-\left(\alpha n^2+\beta n+\gamma\right)\right\}$ が得られる。

$q(n)=ct^n \ (c\neq p, c\neq 0)$ の場合

$b_n=\alpha t^n$ とおくと，漸化式は $\alpha t^{n+1}=p\alpha t^n+ct^n \quad \therefore t^n\{\alpha(t-p)-c\}=0$

これが任意の n について成り立つから，$\alpha(t-p)-c=0 \quad \therefore \alpha=\dfrac{c}{t-p}$

また，$a_{n+1}=pa_n+ct^n$ と $\alpha t^{n+1}=p\alpha t^n+ct^n$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\alpha t^{n+1}=p(a_n-\alpha t^n)$ が得られる。

補足：特性方程式を使わないで解く場合

$a_{n+1}=pa_n+ct^n$ の両辺を $\dfrac{1}{t^{n+1}}$ 倍すると，$\dfrac{a_{n+1}}{t^{n+1}}=p\dfrac{a_n}{t^n}+\dfrac{c}{t}$

$b_n=\dfrac{a_n}{t^n}$ とおくと，$b_{n+1}=pb_n+\dfrac{c}{t}$

これを解くことにより，数列 $\{a_n\}$ が求まる。

また，$q(n)=cp^n \ (c\neq 0)$ の場合，

数列$\{a_n\}$の漸化式は$a_{n+1}=pa_n+cp^n$であり,

この場合は，両辺を$\dfrac{1}{p^{n+1}}$倍することにより，$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{c}{p}$を得,

$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$とおいてからb_nを求め，$a_n=p^nb_n$とする。

例題

$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n-2^n\ (n=1,2,3,\cdots)$で定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

解法 1．特殊解を使って解く方法

漸化式 $f(n+1)=3f(n)-2^n$ の特殊解を $b_n=k\cdot 2^n$ とおくと，

$k\cdot 2^{n+1}=3k\cdot 2^n-2^n$

$\therefore 2^n(k-1)=0$

これは任意の n について成り立つから，$k=1$

よって，

$2^{n+1}=3\cdot 2^n-2^n$

これと $a_{n+1}=3a_n-2^n$ の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-2^{n+1}=3a_n-3\cdot 2^n$

$\therefore a_{n+1}-2^{n+1}=3\left(a_n-2^n\right)$

$\therefore a_n-2^n=3^{n-1}(a_1-2)$

$\therefore a_n=3^{n-1}(5-2)+2^n$

$\therefore a_n=3^n+2^n$

解法 2．特殊解を使わないで解く方法

漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ここで，式を見やすくする目的で，

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$$\therefore b_{n+1}-b_n=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore b_n=b_1-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$\therefore b_n=\frac{a_1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore b_n=1+\left(\frac{2}{3}\right)^n \leftrightarrow \frac{a_n}{3^n}=1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\therefore a_n=3^n+2^n$