$y=f(x)$ の逆関数が $x=f(y)$ と表せることについて

関数 $y=f(x)$ が $(p\le x\le q)$ において逆関数をもつとき，

すなわち x と y が 1 対 1 に対応または $y=f(x)$ が単調に変化するとき，

$y=f(x)$ $(p\le x\le q)$ とその逆関数は，関数とその逆関数の性質より，

$y=x$ に関して対称だから，

$y=f(x)$ 上の任意の点を点 $\mathrm{A}(x,y)$，

点 A と $y=x$ に関して対称な点を点 $\mathrm{B}(X,Y)$ とすると，

点 B は $y=f(x)$ $(p\le x\le q)$ の逆関数上の点であり，

点 A と点 B の間で $(x,y)=(Y,X)$ $(p\le x=Y\le q)$ が成り立つ（補足参照）。

よって，

$y=f(x)$ $(p\le x\le q)$ の x に Y を， y に X を代入することにより，

点 B についての X と Y の関係式 $X=f(Y)$ $(p\le Y\le q)$ が得られる。

ここで， (X,Y) を (x,y) に書き直せば，

関数 $y=f(x)$ が $(p\le x\le q)$ の逆関数は， $x=f(y)$ $(p\le y\le q)$ と表せる。

補足

点 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$ と点 $\mathrm{Q}(X_1,Y_1)$ が $y=x$ に関して対称であるとき

中点の座標 $\left(\dfrac{x_1+X_1}{2},\dfrac{y_1+Y_1}{2}\right)$ は $y=x$ を満たから， $\dfrac{y_1+Y_1}{2}=\dfrac{x_1+X_1}{2}$

$\therefore x_1-y_1=-X_1+Y_1$ ・・・①

直線 PQ は $y=x$ と直交するから，その傾きは -1 である。

よって， $\dfrac{y-Y}{x-X}=-1$ $\therefore x_1+y_1=X_1+Y_1$ ・・・②

①かつ②より， $x_1=Y_1,y_1=X_1$