合成関数・媒介変数で表された関数・陰関数・逆関数の微分

はじめに

微分可能な関数 $y=f(x)$ 上の任意の 2 点を $\mathrm{P}\left(x, f(x)\right)$，$\mathrm{Q}\left(x+\Delta x, f(x+\Delta x)\right)$ とすると，

点 P から点 Q に変化するときの変化の割合は線分 PQ の傾きで与えられ，

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ となる。

さらに，分子の $f(x+\Delta x)-f(x)$ は x の変化が Δx のときの y の変化を表すから，

これを Δy で表すと，点 P から点 Q に変化するときの変化の割合は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ となる。

また，$\Delta x \to 0$ のときの，つまり点 Q を点 P に無限に近づけていったときの変化率は，

点 P における変化率と等しくなり，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ で与えられる。

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が点 P から点 Q への平均変化率ならば，

$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は点 P における瞬間変化率ということになる。

たとえると，

直線道路を移動中の車が $\Delta y\,\mathrm{km}$ 離れた 2 点 PQ 間を Δx 時間かけて走行したとすると，

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は PQ 間の平均時速であり，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は速度計（時速）の点 P における値である。

また，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は，$\dfrac{dy}{dx}$ や $f'(x)$ とも表せるので，

$y=f(x)$ の瞬間変化率は，$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

A．合成関数の微分

1．合成関数 $y=g(h(i(x)))$ の場合

$i(x)$ の x に対する瞬間変化率 $=\dfrac{di(x)}{dx}$

$h(i(x))$ の $i(x)$ に対する瞬間変化率 $=\dfrac{dh(i(x))}{di(x)}$

$g(h(i(x)))$ の $h(i(x))$ に対する瞬間変化率 $=\dfrac{dg(h(i(x)))}{dh(i(x))}$

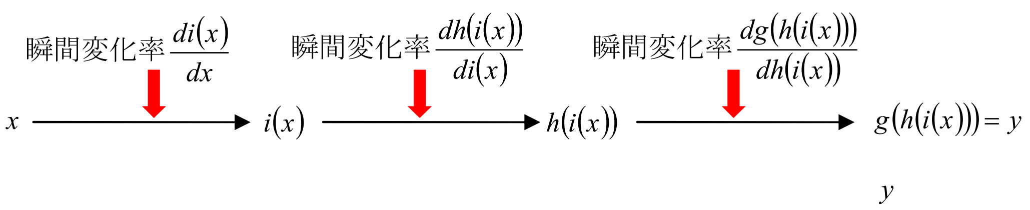
より，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{di(x)}{dx}\cdot\dfrac{dh(i(x))}{di(x)}\cdot\dfrac{dg(h(i(x)))}{dh(i(x))}$ が成り立つ。

また，

$i(x)=u$， $h(i(x))=v$ とすると，これと $g(h(i(x)))=y$ より，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{dv}{du}\cdot\dfrac{dy}{dv}$ と簡略表現できる。



2．合成関数の第 2 次導関数

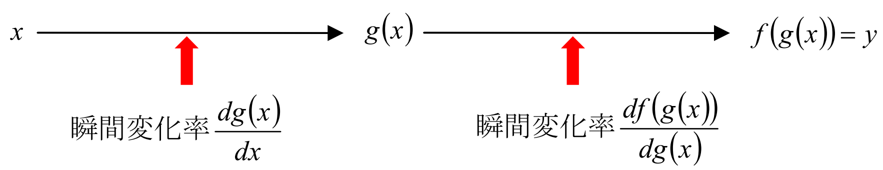
少なくとも 2 階微分可能な関数 $y=f(g(x))$ について，簡単のため，$u=g(x)$ とおくと，

その第 2 次導関数は，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2+\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}$

解説

$y=f(g(x))$ の第 1 次導関数は，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dg(x)}{dx}\cdot\dfrac{df(g(x))}{dg(x)}=\dfrac{dg(x)}{dx}\cdot\dfrac{dy}{dg(x)}$ であり，

簡単のため，$u=g(x)$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\dfrac{dy}{du}$ となる。



よって，$y=f(g(x))$の第 2 次導関数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$は，$\dfrac{du}{dx}\dfrac{dy}{du}$を$x$で微分することにより得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\dfrac{du}{dx}\dfrac{dy}{du}\right)}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}\right)\\
&=\frac{d\left(\dfrac{du}{dx}\right)}{dx}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\left(\dfrac{dy}{du}\right)}{dx}\\
&=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left\{\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\left(\dfrac{dy}{du}\right)}{du}\right\}\\
&=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left\{\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2y}{du^2}\right\}\\
&=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{du^2}\\
&=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}
\end{aligned}
$$

あるいは，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}\right)'&=\left(\frac{du}{dx}\right)'\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left(\frac{dy}{du}\right)'\\
&=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left(\frac{d\left(\dfrac{dy}{du}\right)}{dx}\right)\\
&=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\left(\dfrac{dy}{du}\right)}{du}\right)\\
&=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{du}{dx}\cdot\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2y}{du^2}\right)\\
&=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}
$$

B.　媒介変数で表された関数の微分

1.　第 1 次導関数

$(x, y)=(f(t), g(t))$ とすると，

x の t に対する瞬間変化率$=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{df(t)}{dt}=f'(t)$

y の t に対する瞬間変化率$=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dg(t)}{dt}=g'(t)$ より，

y の x に対する瞬間変化率 $\dfrac{dy}{dx}$ は，媒介変数 t を介することにより，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{dg(t)}{dt}}{\dfrac{df(t)}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

2.　第 2 次導関数

第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とは，$\dfrac{dy}{dx}$ の x に対する瞬間変化率 $\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}$ のことだから，

$\dfrac{dy}{dx}$ が媒介変数 t で表せることを利用することにより，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\left(\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\right)'}{f'(t)}$$ となる。

補足

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}$ は，$\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}$ を $\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}\rightarrow\dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx}\rightarrow\dfrac{d^2y}{(dx)^2}\rightarrow\dfrac{d^2y}{dx^2}$ による。

C．陰関数の微分

y が x の関数であるとき，

$y=f(x)$ の形で表現した関数を陽関数，$f(x,y)=0$ の形で表現した関数を陰関数とよぶ。

y が x の関数でありかつ x で微分可能な陰関数を

$f(x,y)=0$，ただし $f(x,y)=g(x)+h(y)$ とすると，

y は x で微分可能だから，

$$\begin{aligned}\frac{df(x,y)}{dx}&=\frac{d(g(x)+h(y))}{dx}\\&=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dh(y)}{dx}\\&=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dh(y)}{dy}\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{df(x,y)}{dx}=\frac{dg(x)}{dx}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dh(y)}{dy}=0$$

例題

$ax^2+by^2+c=0$（a,b は 0 でない実数）の $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

解

$$\begin{aligned}\frac{d(ax^2+by^2+c)}{dx}&=\frac{d(ax^2)}{dx}+\frac{d(by^2)}{dx}+0\\&=2ax+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d(by^2)}{dy}\\&=2ax+\frac{dy}{dx}\cdot 2by\\&=2\left(ax+by\cdot\frac{dy}{dx}\right)\end{aligned}$$

これと $\dfrac{d(ax^2+by^2+c)}{dx}=0$ より，

$$ax+by\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by}$$

D．逆関数の微分

1．第 1 次導関数

関数とその逆関数のグラフは $y=x$ に関して対称だから， $y=f(x)$ が逆関数をもつとき，その逆関数は $x=f(y)$ と表せる。したがって， $y=f(x)$ の逆関数の第 1 次導関数は，$x=f(y)$ の両辺を x で微分することにより得られる。

すなわち，$\dfrac{dx}{dx}=\dfrac{df(y)}{dx}$， $\dfrac{dx}{dx}=1$， $\dfrac{df(y)}{dx}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{df(y)}{dy}$ より， $1=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{df(y)}{dy}$　$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{df(y)}{dy}}$

よって， $y=f(x)$ の逆関数を $y=g(x)$ （$g(x)\equiv f^{-1}(x)$）とすると，
その第 1 次導関数は，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dg(x)}{dx}=\frac{1}{\dfrac{df(y)}{dy}}\quad \text{または}\quad y'=g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$$

2．第 2 次導関数

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\dfrac{1}{\dfrac{df(y)}{dy}}\right)}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dx}\frac{d\left(\dfrac{1}{\dfrac{df(y)}{dy}}\right)}{dy}$$

$$=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{-\dfrac{d\left(\dfrac{df(y)}{dy}\right)}{dy}}{\left\{\dfrac{df(y)}{dy}\right\}^2}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{df(y)}{dy}}\left[-\frac{\dfrac{d^2f(y)}{dy^2}}{\left\{\dfrac{df(y)}{dy}\right\}^2}\right]$$

$$=-\frac{\dfrac{d^2f(y)}{dy^2}}{\left\{\dfrac{df(y)}{dy}\right\}^3}$$

あるいは，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$ より，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\dfrac{1}{f'(y)}\right)}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dx}\frac{d\left(\dfrac{1}{f'(y)}\right)}{dy}$$

$$=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2}$$

$$=\frac{1}{f'(y)}\cdot\frac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2}$$

$$=-\frac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$$

よって，$y=f(x)$ の逆関数を $y=g(x)$（$g(x)\equiv f^{-1}(x)$）とすると，
その第 2 次導関数は,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2g(x)}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d^2f(y)}{dy^2}}{\left\{\dfrac{df(y)}{dy}\right\}^3}\quad\text{または}\quad y''=g''(x)=-\frac{f'(y)}{\{f'(y)\}^3}$$

例題 1

$y=\cos x\ (\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $g(x)$ とする。このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ。

富山医科薬科大学（現　富山大学医学部）

略解

$y=\cos x\ (\pi<x<2\pi)$ の逆関数は $x=\cos y\ (\pi<y<2\pi)$ と表せる。

この両辺を x で微分すると，$1=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d\cos y}{dy}$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{d\cos y}{dy}}=-\frac{1}{\sin y}$$

また，$\sin y<0$（$\because \pi<y<2\pi$）より，$\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ゆえに，$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

例題 2

関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

$f(1)=2$，$f'(1)=2$，$f''(1)=3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$g'(2)$ の値を求めよ。

(2)　$g''(2)$ の値を求めよ。

（防衛医科大学校）

略解

(1)

$y=f(x)$ の逆関数は $x=f(y)$ と表せるから，

この両辺を x で微分することにより，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$ が得られる。

よって，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ の第 1 次導関数は，$g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$

また，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称だから，

$f(1)=2 \Leftrightarrow g(2)=1$ より，$y=g(x)$ において，$x=2$ のとき $y=1$

よって，$g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{2}$

(2)

$g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$ より，$g''(x)=-\dfrac{f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$

また，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称だから，

$f(1)=2 \Leftrightarrow g(2)=1$ より，$y=g(x)$ において，$x=2$ のとき $y=1$

$g''(2)=-\dfrac{f''(1)}{\{f'(1)\}^3}=-\dfrac{3}{2^3}=-\dfrac{3}{8}$