逆関数が存在するための条件

“y は x の関数である”とは,「ある x と対応する y がただ１つ存在する」ことである。

逆関数では, x と y の対応関係が逆になるから,

y は x の関数の逆関数, すなわち“x が y の関数である”とは,

「ある y と対応する x がただ１つ存在する」ことである。

以上より,

関数 $y=f(x)$ が逆関数をもつためには、

「１つの x に対しただ１つの y が対応し且つ１つの y に対しただ１つの x が対応する」

という対応関係をもたなければならない。

この対応関係をもつ関数を“1 対 1 対応の関数”といい, 1 対 1 対応の関数は逆関数をもつ。

また, 1 対 1 対応の関数をグラフで表すと,

“１つの x に対しただ１つの y が対応し且つ１つの y に対しただ１つの x が対応する”

ことから, 単調増加（減少）関数であることがわかる。

補足

関数 $y=f(x)$ が単調増加 (減少) 関数であるときの定義域は実数全体である必要はない。

つまり, 適当に決めた定義域において関数 $y=f(x)$ が単調増加（減少）すればよい。

たとえば, $y=x^2$ について,

定義域が実数全体のとき単調増加（減少）関数ではない,

すなわち 1 対 1 対応の関数ではないので逆関数をもたない。

定義域を $x \geqq 0$ のとき, 単調増加関数, すなわち 1 対 1 対応の関数なので逆関数をもつ。

高校数学における逆関数の式の表し方の約束

まず, 1 対 1 対応の関数 $y=f(x)$ を変形し, x を y で表した式 $x=f^{-1}(y)$ にする。

関数 $x=f^{-1}(y)$ は関数 $y=f(x)$ の逆関数であるが,

関数のグラフについて x 軸を関数の定義域としてこれまで学習してきているので,

逆関数 $x=f^{-1}(y)$ の定義域 y を x に, 値域 x を y に書き改めることにより,

$x=f^{-1}(y)$ を $y=f^{-1}(x)$ の形にするという約束になっている。

つまり, 高校では, 逆関数 $x=f^{-1}(y)$ の x と y の文字を交換し $y=f^{-1}(x)$ とする。

$x=f^{-1}(y)$ の x と y を交換し, $y=f^{-1}(x)$ としているので,

・ $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ は, 直線 $y=x$ に関して対称である。

・ $y=f(x)$ の定義域 x と $y=f^{-1}(x)$ の値域 y が一致する。

・ $y=f(x)$ の値域 y と $y=f^{-1}(x)$ の定義域 x が一致する。

補足

広い意味では, 1 つの x に対し y が複数個決まる場合も“y は x の関数である”という。

この場合, 1 つの x に対し y がただ 1 つ決まる関数を 1 価関数, 複数個決まる関数を多価関数, 無限個決まる関数を無限多価関数という。

グラフから見る逆関数の存在の有無

高校で学習する関数の定義によれば，

「y が x の関数ならば，定義域の任意の x の値に対し，y の値がただ 1 つだけ決まる」

逆関数も同じで，

「y が x の逆関数ならば，定義域の任意の x の値に対し，y の値がただ 1 つだけ決まる」

となる。

たとえば $y=x^2$（x は実数全体）では，

1 つの x の値に対し y の値がただ 1 つ決まるので，y は x の関数と言えるが，

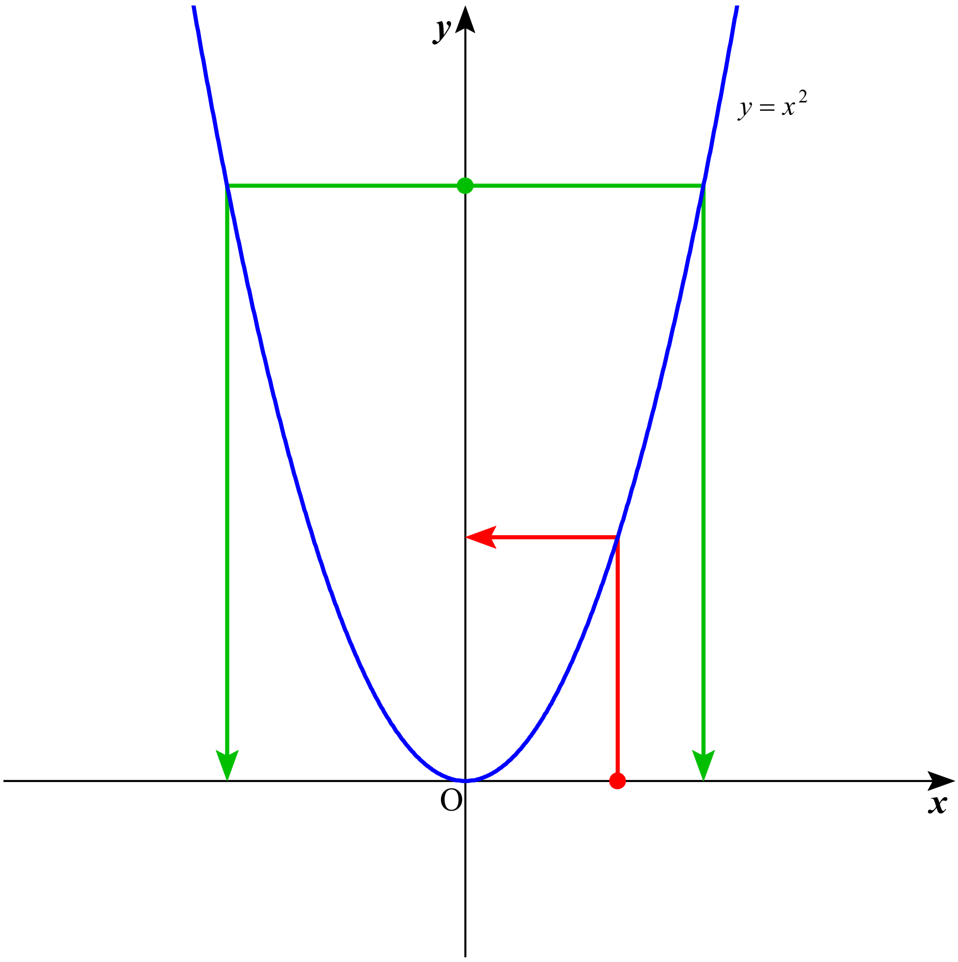
逆向きの対応では，

1 つの y 値に対し x の値が 2 つ決まることになので，x は y の関数ではない。

よって，$y=x^2$（x は実数全体）の逆関数は存在しない。

代数的には $x=\pm\sqrt{y}$ となるので，$y=x^2$（x は実数全体）の逆関数が存在しない，

したがって，仕上げの「x を y に，y を x に書き替えることにより」に進めない。

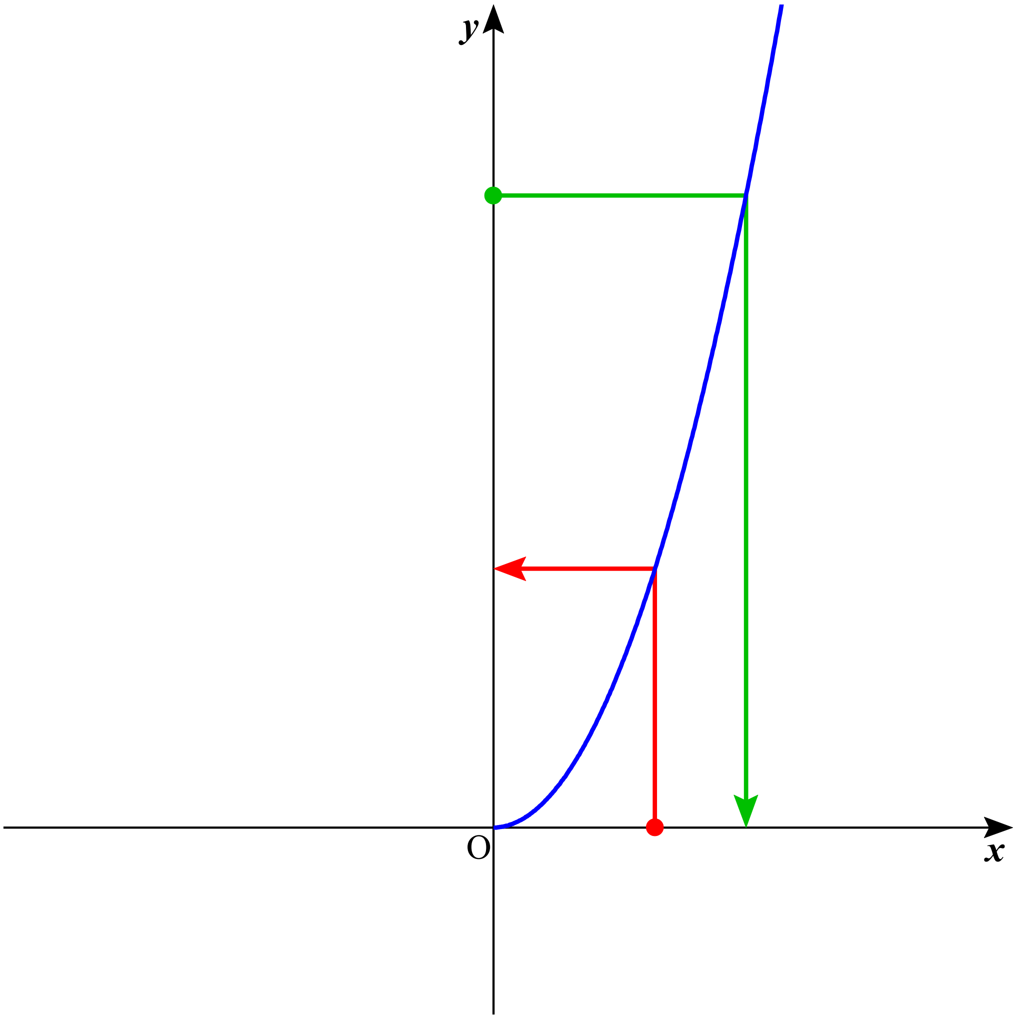


ただし，$y=x^2$（$x\geq 0$）とすれば，対応が下図のようになるので、

$y=x^2$（$x\geq 0$）の逆関数が存在することがわかる。

代数的には，$x=\sqrt{y}$ となり，

仕上げに x を y に，y を x に書き替えて，逆関数は $y=\sqrt{x}$ となる。



以上より，
関数 $y=f(x)$ が逆関数をもつならば $y=f(x)$ は単調に増加または減少し，
逆に，$y=f(x)$ は単調に増加または減少するならば関数 $y=f(x)$ は逆関数をもつことが，
グラフから直感的に理解できるだろう。