反転

反転とは

半径 r の円の中心と異なる任意の点 P に対して，線分 OP またはその P の側への延長上に，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2$ となるような点 Q を対応させるとき，このような点の変換を反転といい，O を反転の中心という。

$$(X,Y)=\left(\frac{r^2x}{x^2+y^2},\frac{r^2y}{x^2+y^2}\right),\quad (x,y)=\left(\frac{r^2X}{X^2+Y^2},\frac{r^2Y}{X^2+Y^2}\right)$$

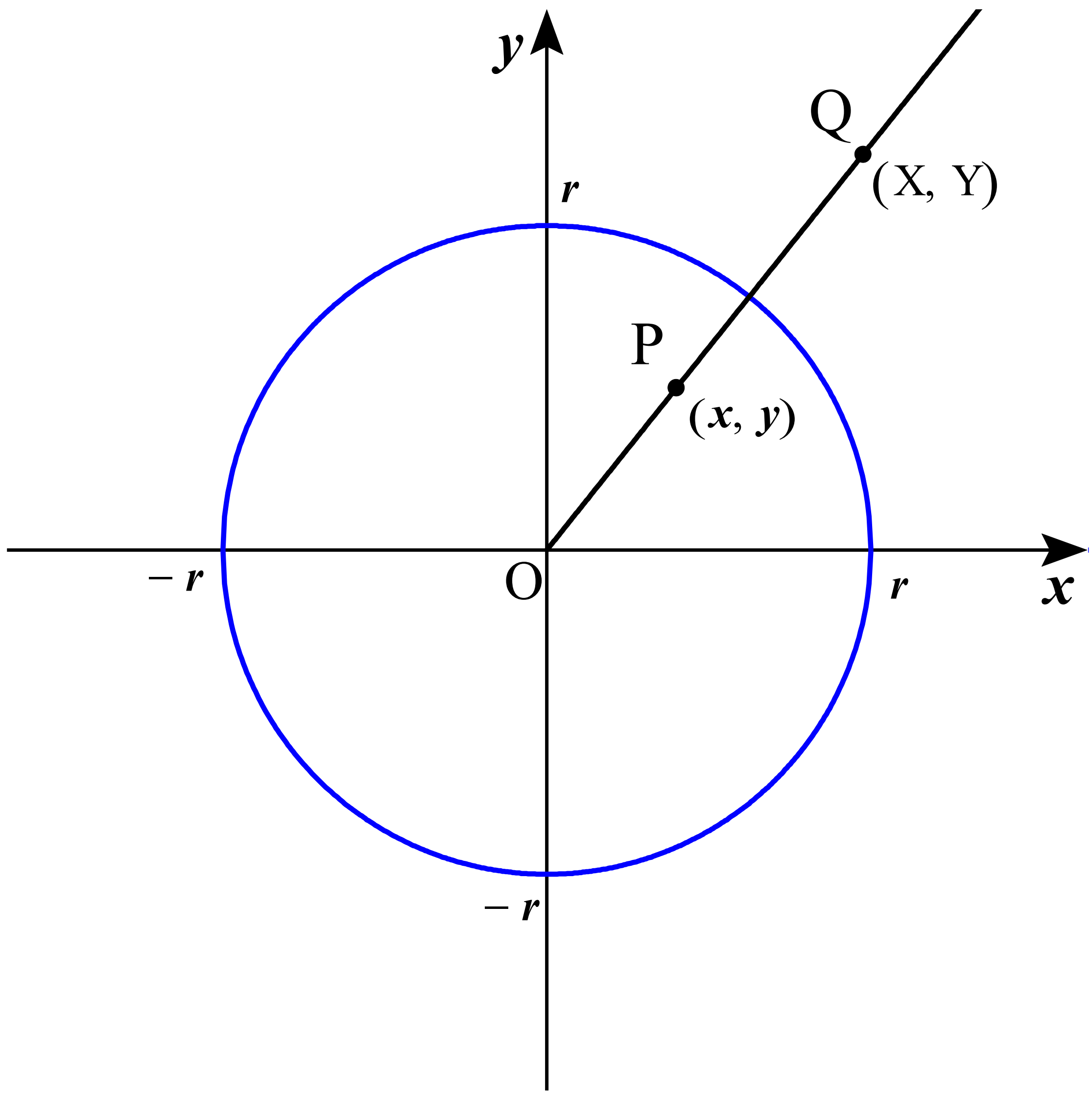
反転によって，

原点を通る直線 $y=mx$ → 同じ直線 $y=mx$

原点を通らない直線 → 原点を通る円

原点を通る円 → 原点を通らない直線

原点を通らない円 → 原点を通らない円



反転の例題

xy 平面上の y 軸に平行な直線 $x=1$ を l とする。

l 上の点 P に対して，次の 3 つの条件を満たす点 Q を対応させる。

(A)　原点を O とするとき，Q は直線 OP 上にある。

(B)　Q の x 座標は負である。

(C)　線分 AB の長さを $|\mathrm{AB}|$ で表すとき，$|\mathrm{OP}||\mathrm{OQ}|=1$ を満たす。

P が l 上を動くとき，Q の軌跡を求めよ。

解法 1：ベクトルで解く

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,y)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(X,Y)$ $(X<0)$ とすると，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=1$ より，点 Q は原点を通らない。すなわち $(X,Y)\neq(0,0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|}$$

$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\left(-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\right)\qquad\left(\because \overrightarrow{\mathrm{OP}}=-k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$$

$$=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}$$

$$=-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$=-\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

より，

$$\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}=-\frac{1}{X^2+Y^2}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\text{，ただし}(X,Y)\neq(0,0)$$

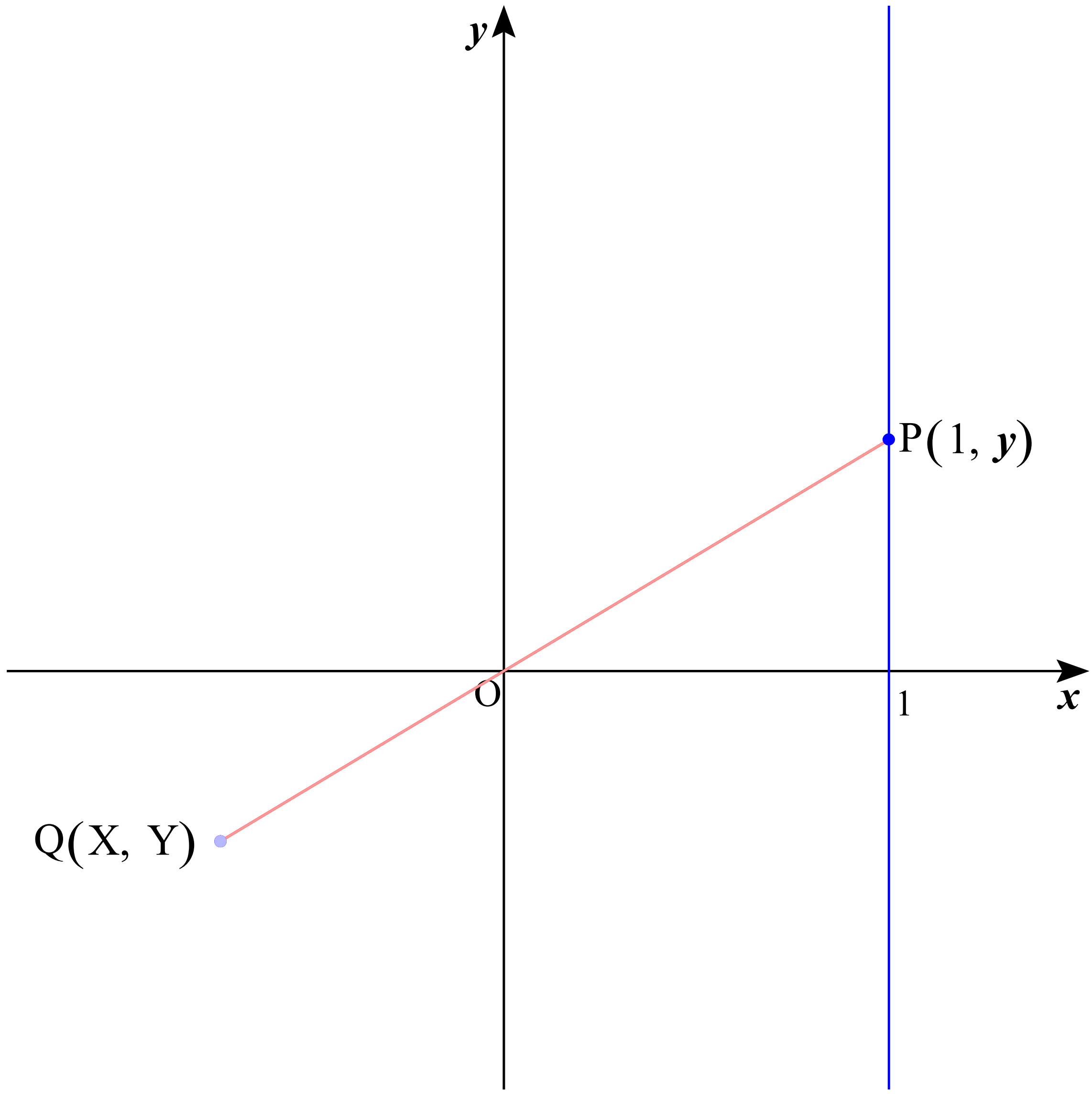
$$\therefore 1=-\frac{X}{X^2+Y^2}$$

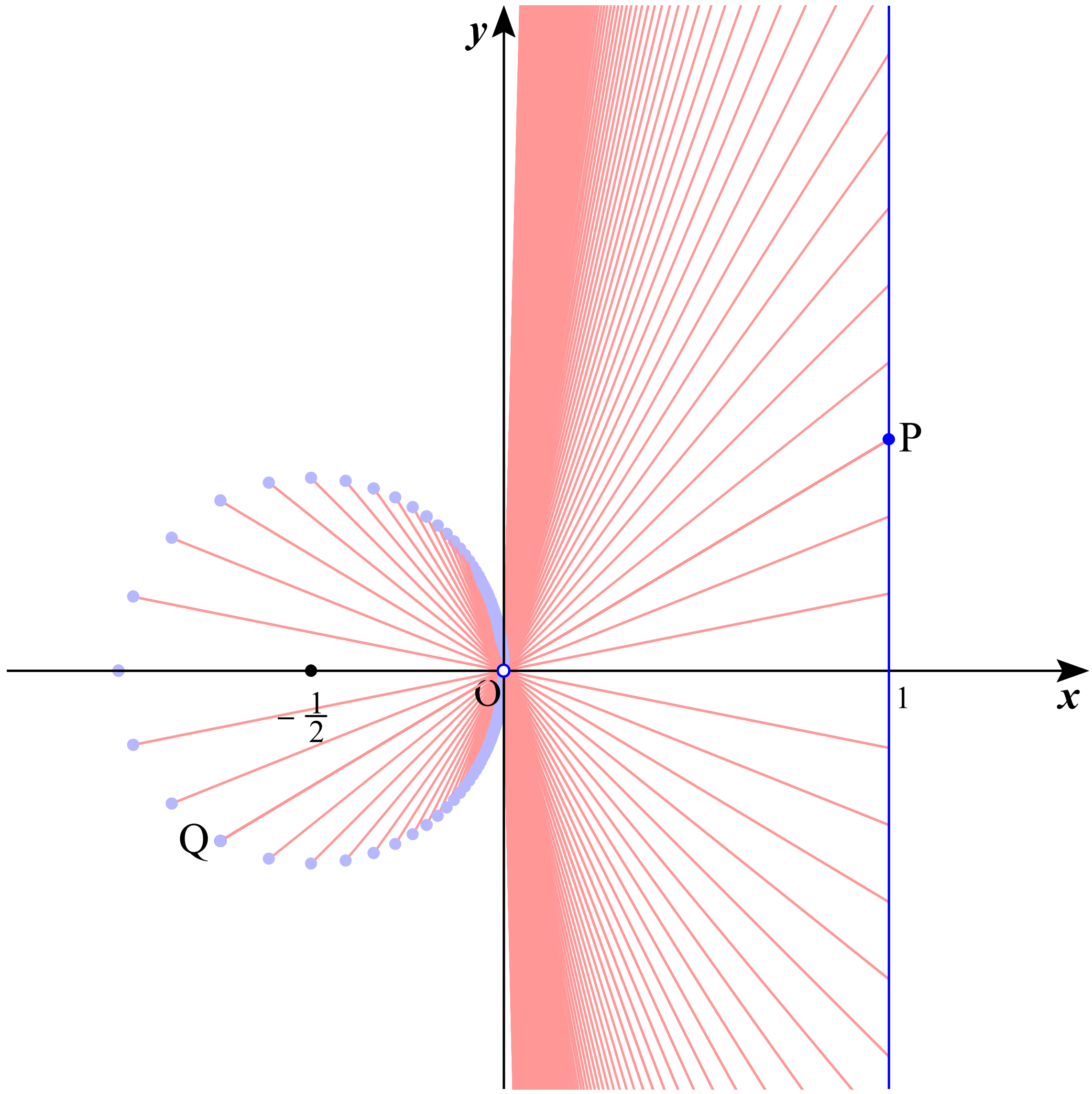
(X,Y) を (x,y) に書き改め，上式を整理することにより，

点 Q の軌跡は，

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\text{，ただし}(x,y)\neq(0,0)$$

と表せる。


y
P(1, y)
O
1
x
Q(X, Y)


y
P
O
$-\frac{1}{2}$
1
x
Q

解法 2：パラメータ（媒介変数）を使って解く

$\mathrm{P}(1,t)$，$\mathrm{Q}(X,Y)$ $(X<0)$とおくと，

$\mathrm{OP}=\sqrt{1+t^2}$，$\mathrm{OQ}=\sqrt{X^2+Y^2}$

条件より，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$だから，$\sqrt{1+t^2}\sqrt{X^2+Y^2}=1$

$\therefore \sqrt{(1+t^2)(X^2+Y^2)}=1$　・・・①

Qは直線OP，すなわち$y=tx$上の点だから，$Y=tX$

$\therefore t=\dfrac{Y}{X}$ $(X<0)$　・・・②

①，②より，

$$\sqrt{\left\{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right\}(X^2+Y^2)}=1$$

$$\therefore \sqrt{\frac{X^2+Y^2}{X^2}(X^2+Y^2)}=1$$

$$\therefore \frac{X^2+Y^2}{|X|}=1$$

$X<0$より，$|X|=-X$

よって，$\dfrac{X^2+Y^2}{-X}=1$

(X,Y)を(x,y)に書き改め，上式を整理することにより，

点Qの軌跡は，

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}，ただし(x,y)\neq(0,0)$$

と表せる。