

桁数に関する問題の解き方

1. 正の数 N の整数部分が n 桁

$$\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq N < 10^n$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq \log_{10} N < n$$

解説

N の桁数	N の範囲
1	$10^0 \leq N < 10^1$
2	$10^1 \leq N < 10^2$
$\vdots$	$\vdots$
n	$10^{n-1} \leq N < 10^n$

2. 正の数 N の整数部分が n 桁で、最高位の数が m

$$\Leftrightarrow m \times 10^{n-1} \leq N < (m+1) \times 10^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (n-1) + \log_{10} m \leq \log_{10} N < (n-1) + \log_{10} (m+1)$$

3. 正の数 N が小数第 n 位に初めて 0 でない数が現れる

$$\Leftrightarrow 10^{-n} \leq N < 10^{-n+1}$$

$$\Leftrightarrow -n \leq \log_{10} N < -n+1$$

解説

N の小数点以下の位	N の範囲
1	$10^{-1} \leq N < 10^0$
2	$10^{-2} \leq N < 10^{-1}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$10^{-n} \leq N < 10^{-n+1}$

4. a^n (a は自然数) の一の位の数を求める方法

a^{p+1} の一の位の数と a^p の一の位の数に a をかけた数の一の位の数は明らかに等しいから、
これを利用して、一の位の数を $a^1, a^2, \dots$ と順に求めていったとき、

a^{m+1} の一の位の数が a^1 の一の位の数が一致したとする。

すると、帰納的に

a^{m+2} の一の位の数と a^2 の一の位の数が一致する。

a^{m+3} の一の位の数と a^3 の一の位の数が一致する。

$\vdots$

a^{m+m} の一の位の数と a^m の一の位の数が一致する。

a^{m+m+1} の一の位の数と a^1 の一の位の数が一致する。

a^{m+m+2} の一の位の数と a^2 の一の位の数が一致する。

a^{m+m+3} の一の位の数と a^3 の一の位の数が一致する。

$\vdots$

となる。

つまり、同じ一の位の数に周期 m で繰り返される。

よって、 a^n の指数 n の値を $mk, mk+1, mk+2, \dots, mk+(m-1)$ でグループ分けすると、同じグループに属する数は同一の一の位の数をもつ。

たとえば、 7^{2014} の一の位の数を求めるのであれば、

7^p の一の位の数に 7 をかけることにより、 7^{p+1} の一の位の数求めていけばよいから、

$$\begin{array}{cccccc} 7^m & 7^1 & 7^2 & 7^3 & 7^4 & 7^5 \\ \text{一の位の数} & 7 & 9 & 3 & 1 & 7 \end{array}$$

より、7,9,3,1 が繰り返される。繰り返し周期が 4 だから、これを一般化すると、

$$\begin{array}{cccccc} 7^n & 7^{4m} & 7^{4m+1} & 7^{4m+2} & 7^{4m+3} & \\ \text{一の位の数} & 1 & 3 & 9 & 7 & (m=0,1,2,3,\dots) \end{array}$$

これと $7^{2014} = 7^{4 \cdot 503 + 2}$ より、 7^{2014} の一の位の数 は 9 となる。

5. a^n (a は自然数) の下 2 桁の数を求める方法

$a^1, a^2, a^3, \dots$ と調べ、結果を推測後、数学的帰納法で証明すればよい。