

指数と対数の関係について

対数の定義

$a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$ (a は 1 でない正数, M は正数) について

下図は $y = a^x$ ($a > 1$) のグラフである。よって, x の値 p と対応する y の値は a^p である。

(以後の内容は $0 < a < 1$ としても同じなので, $a > 1$ のグラフのみで扱う)

逆に, グラフから明らかなように, y の値 q と対応する x の値もただ 1 つ存在し,

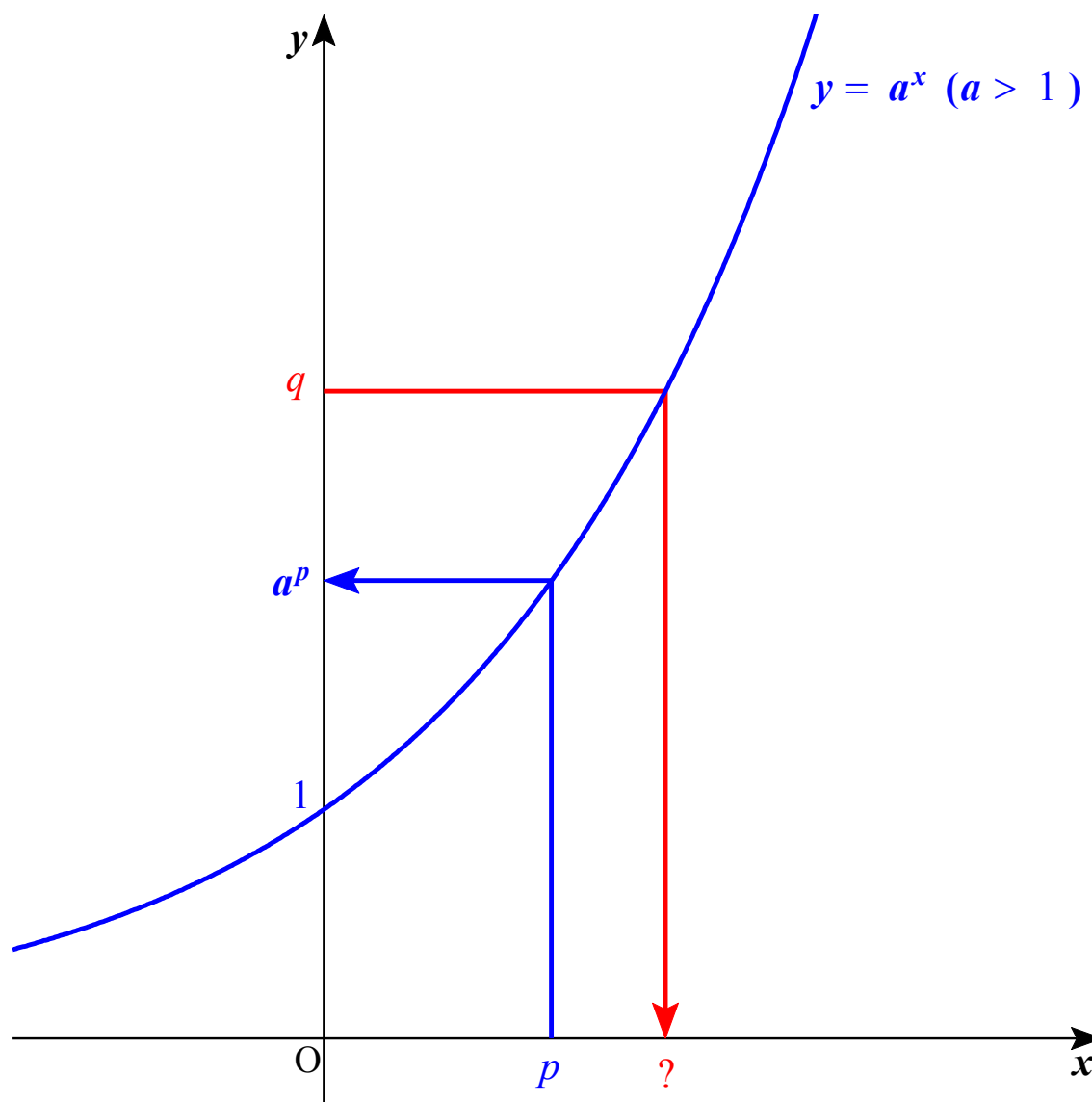
それを ? で示した。この ? を「 a を底とする q の対数」といい, $\log_a q$ と表す。

つまり, $? = \log_a q$ であり, q を「対数 ? の真数」という。

真数 q は指数関数 $y = a^x$ (a は 1 でない正数) の y の値だから, 当然, 正数である。

y の値 a^p については, それと対応する x の値は p だから, $p = \log_a a^p$ であり,

$a^p = M$ とおけば, $p = \log_a M$ となる。よって, $a^p = M \Leftrightarrow p = \log_a M$

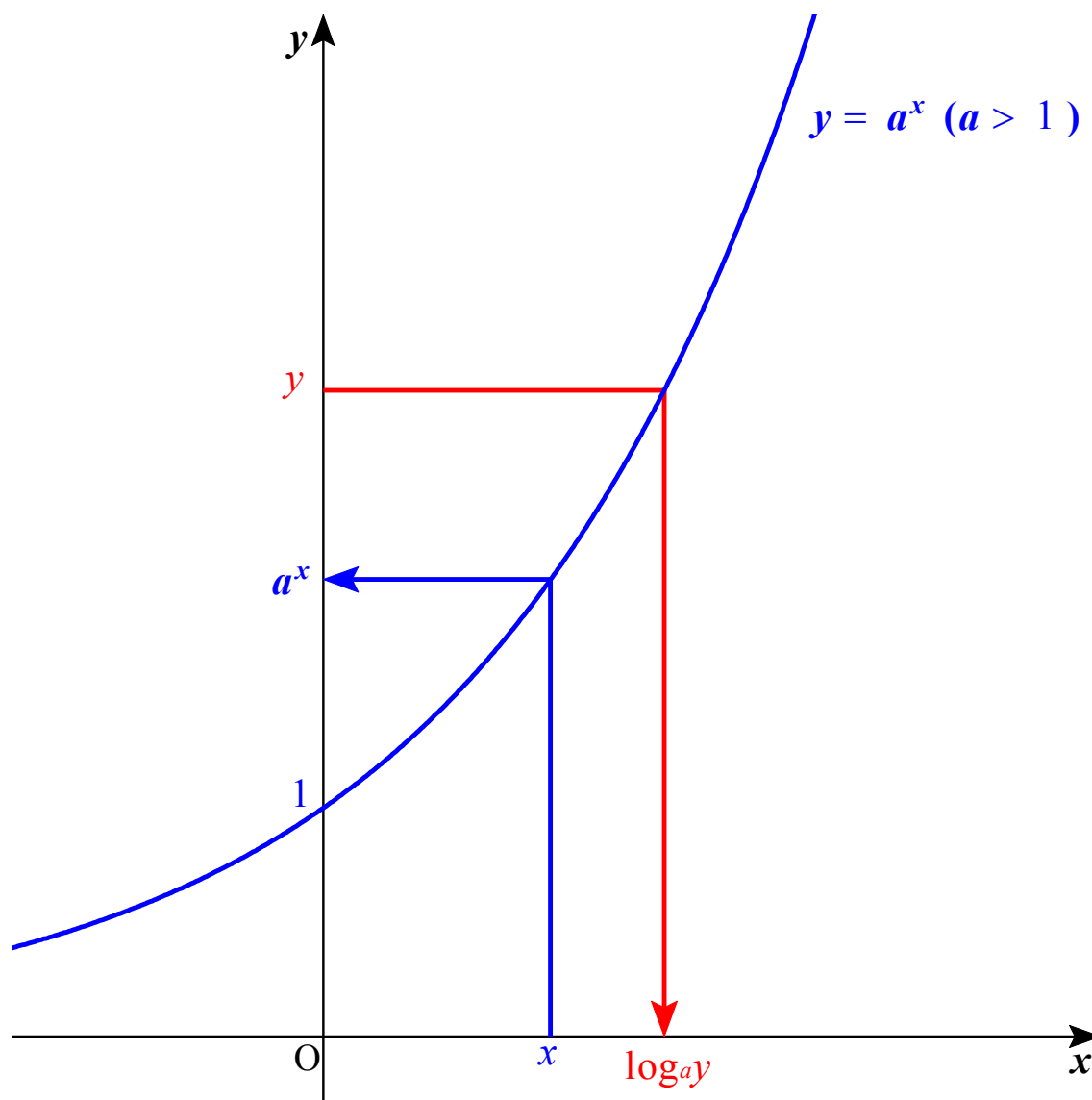


x, y を用いて、指数と対数の関係を一般化すると、

a を底とする指数関数 $y = a^x$ を y から x へ逆向きに対応させると、 x は $x = \log_a y$ と表され、このときの x を「 a を底とする y の対数」、 y を「対数 x の真数」という。

指数関数の定義から、底 a は 1 でない正数、真数 y は正数であるのは明らかである。

また、 $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$

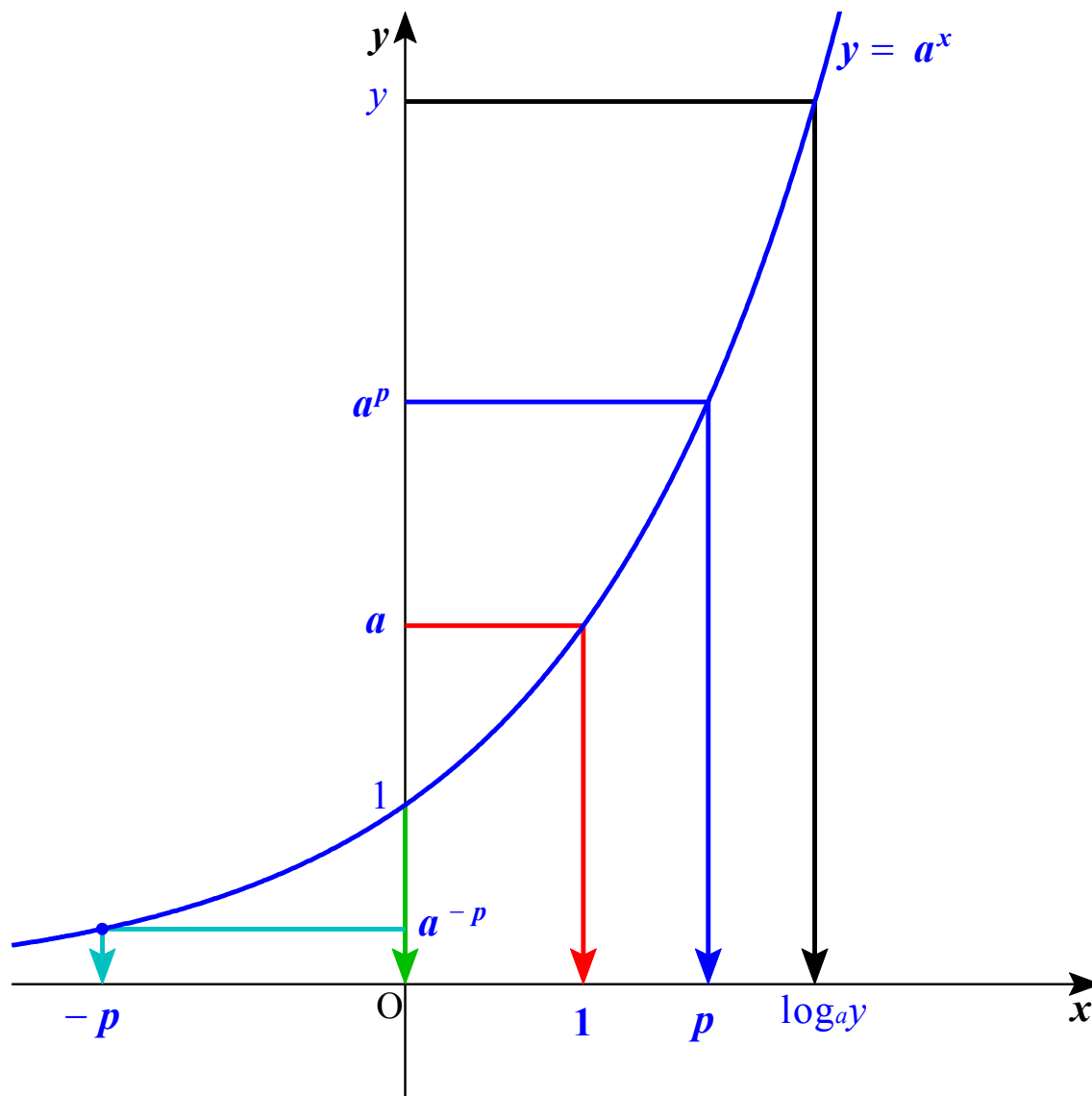


対数の性質 その 1

– $p = \log_a a^{-p}$, $0 = \log_a 1$, $1 = \log_a a$, $p = \log_a a^p$ について

$y = a^x$ を y から x へ対応させたのが $x = \log_a y$ であることから,

– $p = \log_a a^{-p}$, $0 = \log_a 1$, $1 = \log_a a$, $p = \log_a a^p$ の関係が成り立つ。



対数の性質 その2

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$, $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$, $\log_a M^k = k \log_a M$ について

$y = a^x$ を y から x へ対応させたのが $x = \log_a y$ であることから,

$$p = \log_a a^p, q = \log_a a^q, p + q = \log_a a^{p+q} = \log_a a^p a^q, p - q = \log_a a^{p-q} = \log_a \frac{a^p}{a^q}$$

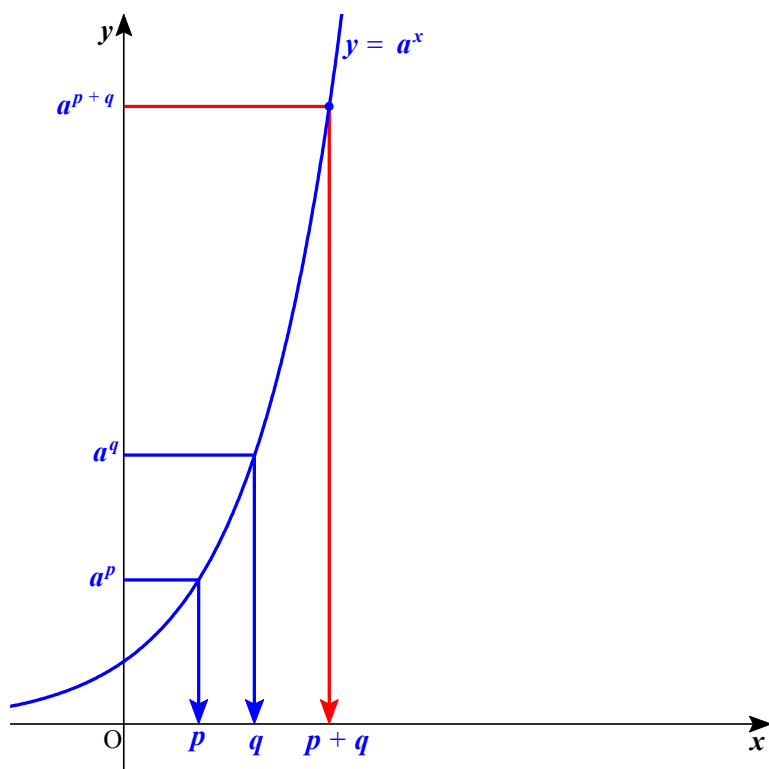
ここで, $a^p = M, a^q = N$ とおくと,

それぞれの式は $p = \log_a M, q = \log_a N, p + q = \log_a MN, p - q = \log_a \frac{M}{N}$ となるから,

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N, \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad \text{の関係が成り立つ。}$$

また, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ より,

$$\begin{aligned} \log_a M^k &= \log_a M^{k-1} M \\ &= \log_a M^{k-1} + \log_a M \\ &= \log_a M^{k-2} M + \log_a M \\ &= \log_a M^{k-2} + \log_a M + \log_a M \\ &\quad \vdots \\ &= \log_a M + \cdots + \log_a M \\ &= k \log_a M \end{aligned}$$



底の変換公式： $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$ について

$$M = a^p \text{ とすると, } p = \log_a M \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_b M = \log_b a^p = p \log_b a \quad \therefore p = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

対数関数のグラフ

$y=a^x$ を y から x へ対応させると $x=\log_a y$ となる。

$x=\log_a y$ では、 y が定義域、 x が値域である。

グラフの横軸は定義域を、縦軸は値域を表すと学んできているので、

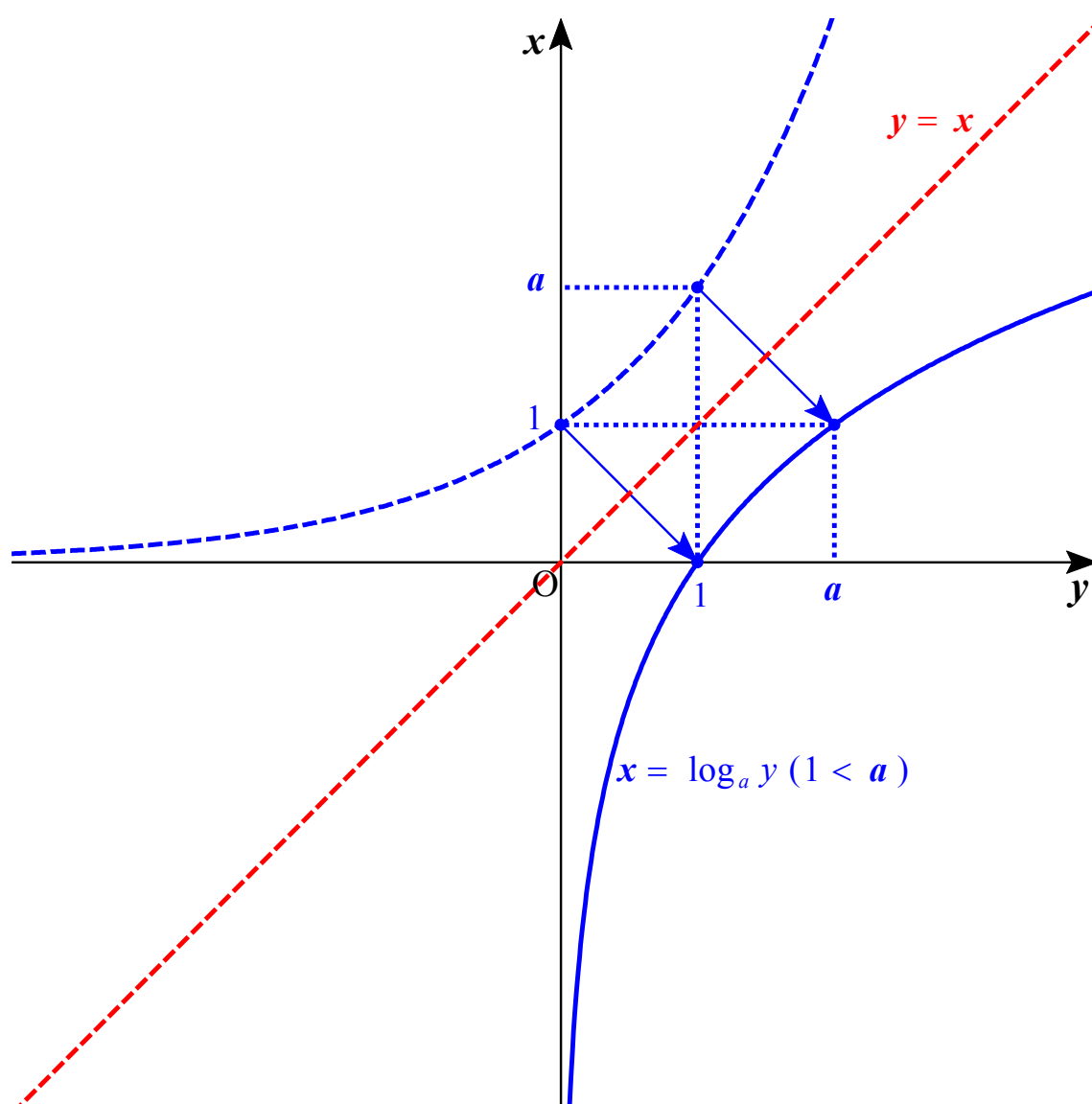
$x=\log_a y$ のグラフにするには $y=a^x$ の縦軸を横軸に、横軸を縦軸にすればよい。

どうすればよいかというと、

直線 $y=x$ を回転軸にして $y=a^x$ を 180° 回転するか

$y=a^x$ を直線 $y=x$ に関して対称移動すればよい。

そうすれば、縦軸と横軸が入れ替わる。

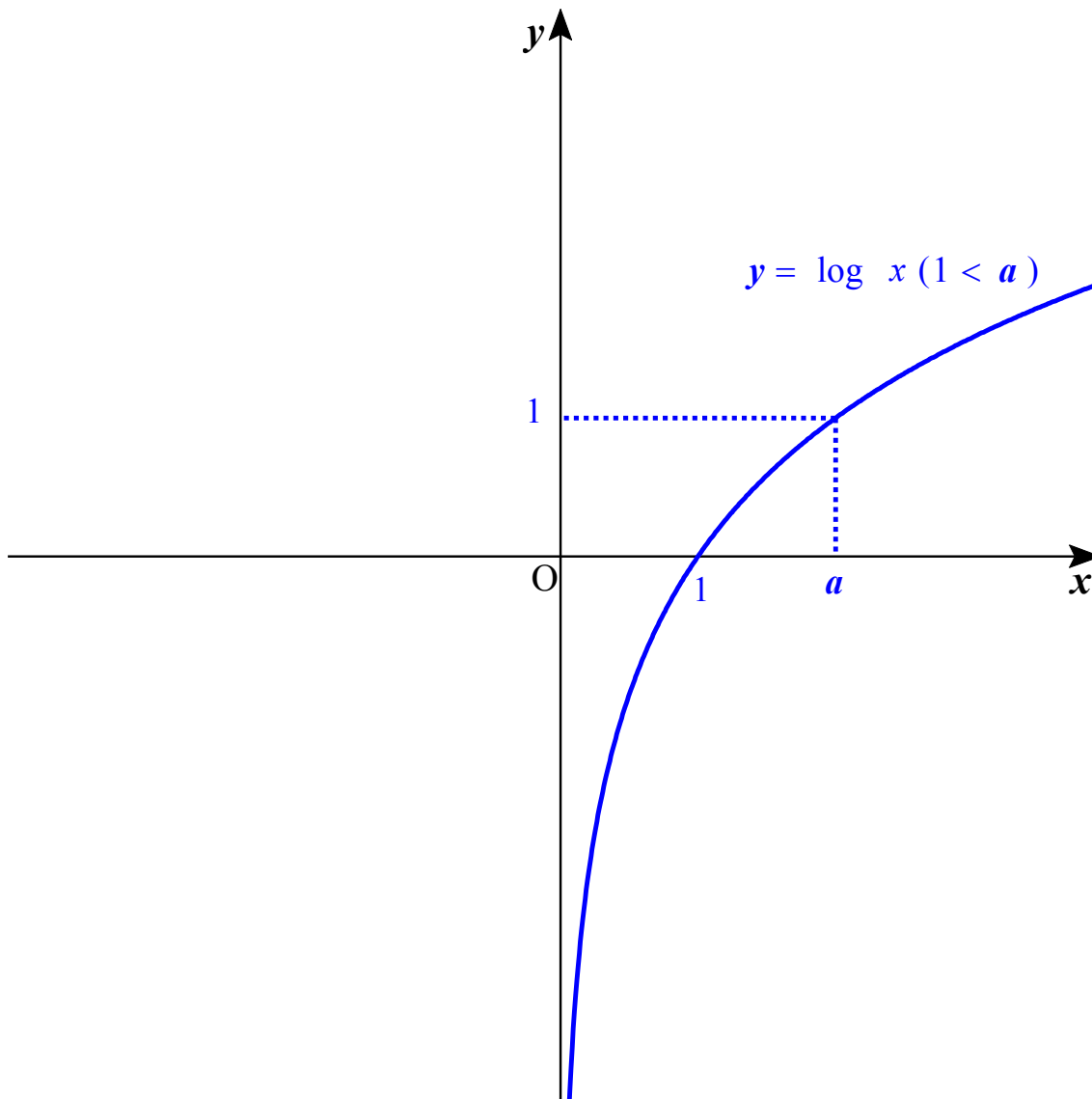


さらに、 xy 座標では、定義域（横軸）を x 、値域（縦軸）を y とするとも学んで来ているので、定義域（横軸）の y を x に、値域（縦軸）の x を y に書き改める。

こうして、 $y = \log_a x$ のグラフが完成する。

また、この経緯から、 $y = \log_a x$ のグラフと $y = a^x$ のグラフは $y = x$ に関して対称である。

以上は $0 < a < 1$ の場合でも同じである。



以上を整理すると,

