連立方程式を利用した積分計算

例題

(1) $\int e^x \cos x dx$ **(2)** $\int e^{-x} \sin x dx$

(1)

解法 **1**：オーソドックスな解き方

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= \int e^x (\sin x)' dx \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \sin x + \int e^x (\cos x)' dx \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int (e^x)' \cos x dx \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx\end{aligned}$$

よって，$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

解法 **2**：連立方程式を利用した解き方

$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$ ・・・①

$(e^x \cos x)' = -e^x \sin x + e^x \cos x$ ・・・②

①＋②より，$(e^x \sin x)' + (e^x \cos x)' = 2e^x \cos x$ $\therefore e^x \cos x = \left\{\frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)\right\}'$

ゆえに，$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

(2)

解法 **1**：オーソドックスな解き方

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x}\sin x dx &= -\int e^{-x}(\cos x)' dx \\
&= -\left\{e^{-x}\cos x - \int \left(e^{-x}\right)' \cos x dx\right\} \\
&= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx \\
&= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}(\sin x)' dx \\
&= -e^{-x}\cos x - \left\{e^{-x}\sin x - \int \left(e^{-x}\right)' \sin x dx\right\} \\
&= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x dx
\end{aligned}
$$

よって，$\int e^{-x}\sin x dx = -\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$

解法 **2**：連立方程式を利用した解き方

$$\left(e^{-x}\sin x\right)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \quad ・・・①$$

$$\left(e^{-x}\cos x\right)' = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x \quad ・・・②$$

①＋②より，$\left(e^{-x}\sin x\right)' + \left(e^{-x}\cos x\right)' = -2e^{-x}\sin x \quad \therefore e^{-x}\sin x = \left\{-\dfrac{1}{2}e^{x}(\sin x + \cos x)\right\}'$

ゆえに，$\int e^{-x}\sin x dx = -\dfrac{1}{2}e^{x}(\sin x + \cos x) + C$