問題 1

5 人の名刺が 1 枚ずつ別々の封筒に入れてある。この 5 人がそれぞれ別々の封筒を選ぶとき，5 人とも他の人の名刺が入った封筒を選ぶ確率を求めよ。

問題 2

n 人の名刺が 1 枚ずつ別々の封筒に入れてある。この n 人がそれぞれ別々の封筒を選ぶとき，n 人とも他の人の名刺が入った封筒を選ぶ確率を求めよ。

問題 **1** の解説と解答

5 人が手にする名刺の組合せの総数

$5!$ 通り　・・・①

5 人とも他の人の名刺を手にする場合の数の求め方とその数

手順

まず，A が名刺を手にするものとする。

A が手にするのは $b,\ c,\ d,\ e$ の 4 通り　・・・②

A が b を手にしたときは，次に B が名刺を手にする。

A が c を手にしたときは，次に C が名刺を手にする。

A が d を手にしたときは，次に D が名刺を手にする。

A が e を手にしたときは，次に E が名刺を手にする。

さらに，たとえば，A が b を，B が e を手にしたとき，次は E が名刺を手にする。

A が *b* を手にしたときの場合の数

次に B が a，c，d，e のいずれかを手にすることになる。

B が手にした名刺が a のとき

A	B	C	D	E	
b	a	d	e	c	の 2 通り
b	a	e	d	c	

B が手にした名刺が c のとき

A	B	C	D	E	
b	c	a	e	d	
b	c	d	e	a	の 3 通り
b	c	e	a	d	

B が手にした名刺が d のとき

A	B	D	E	C	
b	d	a	c	e	
b	d	c	a	e	の 3 通り
b	d	e	c	a	

B が手にした名刺が e のとき

A	B	E	C	D	
b	e	a	d	c	
b	e	c	d	a	の 3 通り
b	e	d	a	c	

よって，

A が b を手にしたとき，5 人とも他の人の名刺を手にする場合の数は

$2+3\cdot 3=11$ 通り　・・・③

5 人とも他の人の名刺を手にする場合の数

同様にして，A が c，d，e を手にしたときの場合の数もそれぞれ 11 通り。

よって，5 人とも他の人の名刺が入った封筒の選び方の総数は,

②と③より，$4\times 11=44$ 通り　・・・④

5 人が，それぞれ別々の封筒を選ぶ確率

①と④より，$\dfrac{44}{5!}=\dfrac{11}{30}$

問題 2 の解説と解答

n 人それぞれが自分のとは異なる名刺を手にする場合の数を a_n とする。

ここで，A，B，C，D，E の 5 人が自分のとは異なる名刺を手にする場合の数についてもう 1 度考えると，

A が b を手にしたとき

続いて B が a，c，d，e のいずれかを手にすることになる。

(i) B が手にした名刺が a のとき

C，D，E の 3 人それぞれが自分のとは異なる名刺を手にする場合の数となるから，その数は a_3

(ii) (i)でないとき，すなわち B が名刺 a を手にすることができないとき

B，C，D，E の 4 人それぞれが自分のとは異なる名刺（B については a）を手にする場合の数となるから，a_4

(i)と(ii)より，このときの場合の数は a_3+a_4

A が c，d，e を手にしたときもそれぞれの場合の数は a_3+a_4

よって，A，B，C，D，E の 5 人が自分のでない名刺を手にする場合の数は，

すなわち a_5 は，a_3 と a_4 を用いて，$a_5=4(a_3+a_4)$　と表せる。

したがって，これを n 人の場合に当てはめると，$a_n=(n-1)(a_{n-2}+a_{n-1})\ (n\geq 3)$　と表せ，

これは，$a_n-na_{n-1}=-\{a_{n-1}-(n-1)a_{n-2}\}$　と変形できる。

したがって，これより，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-(n+1)a_n&=-(a_n-na_{n-1})\\
&=(-1)^2\{a_{n-1}-(n-1)a_{n-2}\}\\
&=(-1)^3\{a_{n-2}-(n-2)a_{n-3}\}\\
&\ \ \vdots\\
&=(-1)^{n-1}(a_2-2a_1)\\
&=(-1)^{n-1}(1-2\cdot 0)\\
&=(-1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

これと，$(-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}$ より，

$a_{n+1}-(n+1)a_n=(-1)^{n+1}$

この両辺を $(n+1)!$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_n}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

よって，数列 $\left\{\frac{a_n}{n!}\right\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ より，

$n \geq 2$ のとき，

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{a_1}{1!} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
$$= \frac{a_1}{1!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= \frac{0}{1!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$$

ゆえに，$a_n = n!\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$

したがって，n 人それぞれが自分のとは異なる名刺を手にする確率を p_n とすると，

$p_n = \frac{a_n}{n!}$ より，$p_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$

以上より，求める確率は

$n = 1$ のとき 0

$n \geq 2$ のとき $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$