e 関連の極限公式の導き方の流れ

e は主に次の 4 つの形で表現できる。

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

$$\lim_{h\to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}=e$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$$

これらは以下のような関係にある。

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ から始める場合

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$\frac{1}{x}=t$ とおく

$$\lim_{t\to \infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$$

自然対数をとる

$$\log\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e$$

$$\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$\log(1+x)=u$ とおくと,

$1+x=e^{u}$ より,

$x=e^{u}-1$ だから

$$\lim_{u\to o}\frac{u}{e^{u}-1}=1$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u}=1$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ から始める場合

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\Big\downarrow \; e^x - 1 = t \text{ とおく}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{\log(1+t)} = 1$$

よって，

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

また，

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \log \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

$\text{左辺} = 1 = \log e$ より，

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\Big\downarrow \; \frac{1}{t} = u \text{ とおく}$$

$$\lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

補足

指数関数 $y = f(x) = a^x \,(a > 0, a \neq 1)$ において，

e は次のように定義される。

$y = f(x) = a^x \,(a > 0, a \neq 1)$ のうち，

$x = 0$ における接線の傾きが 1 であるものを $y = e^x$ とする。

よって，

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = 1$ より，

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$