

**e 関連の極限公式の導き方の流れ**

e は主に次の 4 つの形で表現できる。

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

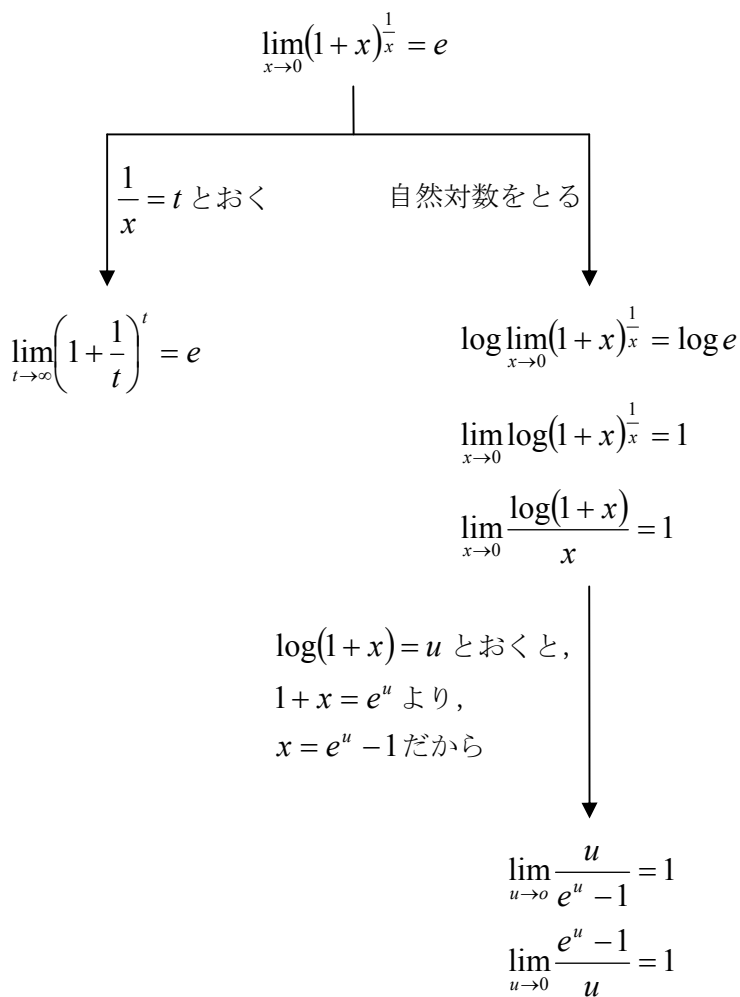
$$\lim_{h \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$$

これらは以下のような関係にある。

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  から始める場合



$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  から始める場合

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

↓  $e^x - 1 = t$  とおく

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log(1+t)} = 1$$

よって,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

また,

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \log \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

左辺 = 1 =  $\log e$  より,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

↓  $\frac{1}{t} = u$  とおく

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$$

### 補足

指数関数  $y = f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) において,

$e$  は次のように定義される。

$y = f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) のうち,

$x = 0$  における接線の傾きが 1 であるものを  $y = e^x$  とする。

よって,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = 1 \text{ より,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$