$${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = \sum_{k=r}^{n} {}_{k}\mathrm{C}_{r}$$

証明

$(x+1)^{n+1} - 1 = \{(x+1)-1\}\{(x+1)^n + (x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \cdots + (x+1)^2 + (x+1) + 1\}$ より，

$(x+1)^{n+1} - 1 = x\{(x+1)^n + (x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} \cdots + (x+1)^2 + (x+1) + 1\}$

左辺と右辺は x の恒等式だから，各項の係数がそれぞれ等しい。

したがって，x^{r+1} の項の係数が左辺と右辺で一致する。

左辺の x^{r+1} の項の係数

二項定理より，${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ ・・・①

右辺の x^{r+1} の項の係数

式 $(x+1)^n + (x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \cdots + (x+1)^2 + (x+1) + 1$ の x^r の項の係数と等しいから，

二項定理より，${}_{n}\mathrm{C}_{r} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r} + {}_{n-2}\mathrm{C}_{r} + \cdots + {}_{r+1}\mathrm{C}_{r} + {}_{r}\mathrm{C}_{r}$ すなわち $\sum_{k=r}^{n} {}_{k}\mathrm{C}_{r}$ ・・・②

①＝②より，${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = \sum_{k=r}^{n} {}_{k}\mathrm{C}_{r}$